Nuevas medidas de privación y de satisfacción relativas[1].

Luis José Imedio Olmedo
Encarnación M. Parrado Gallardo
Elena Bárcena Martín[2]

Dpto. Economía Aplicada. Estadística y Econometría
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Málaga

Resumen.

En este trabajo se contemplan distintas formas de realizar comparaciones entre individuos en términos de privación y/o satisfacción. Ello permite interpretar los índices de Gini, de Bonferroni y de De Vergottini tanto como medidas de privación como de satisfacción social. Al utilizar diferentes criterios de ponderación al promediar la privación/satisfacción asociadas a cada nivel de renta se obtienen los elementos de la familia **β** de medias de desigualdad, o combinaciones lineales de ellos. En particular, los índices de Gini generalizados (Yitzhaki, 1983), los propuestos por Aaberge (2007) o los de Imedio y otros (2011) pueden ser utilizados para evaluar la privación o la satisfacción social de una distribución de rentas.

Palabras clave: Desigualdad, comparaciones interindividuales, medias ponderadas, familia **β**.
Clasificación JEL: C10, D31, I38.

[1] Los autores agradecen la financiación del Instituto de Estudios Fiscales de España.
[2] Dirección de contacto: Elena Bárcena Martín. Dpto. de Economía Aplicada (Estadística y Econometría, 68). Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Málaga. Campus El Ejido s/n. 29013. Málaga. Correo electrónico: barcenae@uma.es

1. Introducción.

La privación surge como consecuencia de la desigualdad existente dentro de un grupo. Un individuo siente privación[3] al compararse con otros a quienes considera en mejor situación. En las distintas formulaciones que de este concepto se han propuesto en la literatura económica, se define la privación respecto a la variable renta, utilizada habitualmente para valorar la capacidad del individuo para poseer o adquirir bienes. Bajo este supuesto, es evidente la interrelación entre la privación experimentada por los individuos, o por la sociedad, y la desigualdad existente en la distribución de la renta.

Situados en ese contexto, es obligado citar los enfoques de Yitzhaki (1979) y de Hey y Lambert (1980), ambos equivalentes. Estos trabajos han servido de referencia para gran parte de las propuestas posteriores[4], por diversos motivos. En primer lugar, no sólo son pioneros en el tratamiento de esta cuestión, sino que parten de una definición muy intuitiva[5]. Identifican la privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, z>x, con la diferencia z–x. En segundo lugar, los resultados que derivan de ella permiten obtener funciones de bienestar social consistentes con el índice de Gini (1914). Introducen, además, el concepto de satisfacción relativa como contrapartida de la privación. Si el recorrido de la variable renta es el intervalo $[0, x_M]$, un individuo con renta x, $0<x<x_M$, contempla una partición del mismo en dos intervalos: $(x, x_M]$, al que pertenecen las rentas mayores que la suya, respecto a las que siente privación, y $[0, x)$, al que pertenecen las rentas menores que la suya y respecto a las cuales está “satisfecho.” Otra característica de interés en la formulación de Hey y Lambert (1980) es su modo de proceder: parten de la comparación entre individuos; obtienen, a continuación, la privación/satisfacción asociadas a cada nivel de renta y, por último, los valores sociales medios de ambas magnitudes[6].

La relación entre la privación, la satisfacción y la desigualdad permite que los índices de desigualdad puedan considerarse como medidas agregadas de los sentimientos de los individuos que se consideran desfavorecidos o favorecidos respecto a otros, en términos de renta (Temkin

---

[3] El concepto aparece inicialmente en trabajos encuadrados en el ámbito sociológico, tratando de justificar algunos aspectos del comportamiento de la sociedad: Stoufer y otros (1949), Davis (1959), Runciman (1966), Gurr (1968) y Crosby (1976, 1979). Desde el punto de vista económico, el enfoque que ha tenido mayor incidencia es el de Runciman (1966) debido a que sus enunciados son más precisos, lo que facilita su tratamiento analítico. Para este autor, un individuo se siente privado de Z si: (i) no tiene Z, (ii) algún individuo posee Z, (iii) quiere Z y (iv) considera factible tener Z.

[4] Otras aportaciones que se ocupan de la privación respecto de la variable renta son las de Yitzhaky (1982), Chakravarty y Chakraborty (1984), Berrebi y Silber (1985), Paul (1991), Chakravarty y otros (1995), Podder (1996), Chakravarty (1997), Chakravarty y Mukherjee (1998), Imedio y otros (1999), Ebert y Moyes (2000), Bárcena (2003), Imedio y Bárcena (2003), Chakravarty (2007) y Magdalou y Moyes (2009).

[5] La idea se basa en la afirmación de Runciman (1966) acerca de la privación: “…*siendo su magnitud la cuantía de la diferencia entre la situación deseada y la situación del individuo que la desea*”

[6] En algunas propuestas, Berrebi y Silber (1985), se elude la primera etapa. A nuestro juicio, el hacer explícito el modo de realizar las comparaciones interindividuales es esencial en este tipo de formulaciones.

1986, 1993). Algunos autores, Cowell y Ebert (2004), han utilizado esa relación para proporcionar una axiomática alternativa a la habitual sobre las medidas de desigualdad.

Existen, sin embargo, índices clásicos, como el de Bonferroni (1930) o el de De Vergottini (1940), poco estudiados desde este punto de vista[7]. Lo mismo sucede con algunas familias de índices propuestas en la última década. Es el caso de la familia introducida por Aaberge (2007), la de Imedio y otros (2011) o la clase $\boldsymbol{\beta}$ de medidas de desigualdad (Imedio y otros (2009a, 2009b)), que engloba a las anteriores[8] y a los Gini generalizados (Yitzhaki, 1983). Cada una de estas familias caracteriza la distribución de la renta, dada la renta media, y permite evaluar la desigualdad relativa según criterios distributivos muy dispares.

El principal objetivo de este trabajo es proporcionar a los elementos de las familias citadas, o a sus respectivas funciones de bienestar, de una interpretación en términos de privación o de satisfacción[9] relativas. Para ello, se dispone de dos procedimientos.

Una alternativa es la propuesta de nuevas formulaciones al comparar la situación de dos individuos a partir de sus rentas en una distribución dada. Estas formulaciones deben tener en cuenta varios aspectos:

- La privación de un individuo, dado su nivel de renta, depende al menos de otros dos factores: el grupo al que pertenezca y del conjunto de individuos que tome como referencia al establecer comparaciones.
- En principio, existen muchas posibilidades al establecer cómo se realizan las comparaciones interindividuales, pero las definiciones correspondientes han de tener un significado claro, cumplir unas condiciones mínimas y ser comparables con las utilizadas en otros enfoques.
- El tratamiento analítico posterior ha de ser abordable.

Las medidas de desigualdad, o sus funciones de bienestar asociadas, se obtienen como valores medios de las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación. Por lo tanto, al calcular estos valores se pueden utilizar medias simples o medias ponderadas. En el primer caso, se obtienen índices de desigualdad concretos. En el segundo, el uso de ponderaciones permitirá discriminar entre los distintos tramos de la distribución, asignando distinto peso a la privación asociada a sus respectivos niveles de renta. La segunda alternativa consiste precisamente en el empleo de ponderaciones. Al igual que en la medición de la desigualdad cada índice incorpora su propio criterio al agregar la información contenida en la distribución, según los juicios de valor que subyacen en él, al evaluar la privación/satisfacción media de la sociedad se pueden adoptar diferentes actitudes, asignando distintos pesos a los diferentes tramos de la distribución.

---

[7] En Bárcena e Imedio (2008) se hacen algunas consideraciones sobre ellos en ese aspecto.
[8] El único índice de los citados no perteneciente a $\boldsymbol{\beta}$ es el de De Vergotini.
[9] En ocasiones, para no ser reiterativos en el empleo de ambos términos, al hablar de privación nos estaremos refiriendo también a la satisfacción.

En particular, si las ponderaciones dependen de parámetros, al variar sus valores se podrán obtener distintas familias de medidas de desigualdad.

El esquema del trabajo es el siguiente. En la sección segunda se introduce el marco de análisis, algunos índices clásicos y la familia **β** de medidas de desigualdad. Se citan algunas de sus características estadísticas y normativas[10]. La sección tercera incluye distintas definiciones de la privación entre individuos, en función del grupo con el que se identifiquen y del que consideren al realizar las comparaciones. En la sección cuarta se obtienen los índices de la familia **β** a partir de las medias ponderadas de las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación. Finalmente, unas breves conclusiones.

2. Algunas medidas de desigualdad.

La renta está representada por la variable aleatoria X, cuyo dominio, $[0, x_M]$, está contenido en la semirrecta real positiva, $R_0^+ = [0, \infty)$. $F(\cdot)$ es su función de distribución[11] y $\mu = E(X) = \int_0^\infty x dF(x) < \infty$ su renta media.

La curva de Lorenz de F, L(.), se define mediante:

$$L : [0,1] \rightarrow [0,1] \ , \ L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^x s dF(s) \, , \ 0 \le p \le 1 \, , \qquad [1]$$

Para cada p=F(x), L(p) es la proporción del volumen total de renta que acumula el conjunto de unidades con renta menor o igual que x. Es evidente que $L(p) \le p$, $0 \le p \le 1$. En caso de equidistribución es L(p)=p, mientras que si la concentración es máxima, L(p)=0 si $0 \le p < 1$ y L(1)=1. La curva de Lorenz es no decreciente y convexa.

2.1. Los índices de Gini, Bonferroni y De vergottini.

Una transformación de la curva de Lorenz da lugar a otra representación gráfica de la desigualdad, la curva de Bonferroni (1930), $B(\cdot)$. Se define como[12]:

$$B : [0,1] \rightarrow [0,1] \ , \ B(p) = \begin{cases} \dfrac{L(p)}{p} \, , 0 < p \le 1 \, , \\ 0 \ , \ p = 0. \end{cases} \qquad [2]$$

Se verifica $B(p) \le 1$, $0 \le p \le 1$. Para una distribución igualitaria se tiene que B(p)=1, $0 \le p \le 1$, mientras que cuando la concentración es máxima, B(p)=0 si $0 \le p < 1$ y B(1)=1. Para cualquier

---

[10] Todas las demostraciones de los resultados que se proporcionan en este trabajo están a disposición de quienes las soliciten a los autores.

[11] En ocasiones, para facilitar la obtención de resultados teóricos, se supondrá la continuidad de F. En tal caso, f(x)=F´(x) es la función de densidad de la distribución.

[12] En la siguiente expresión, si la renta mínima es $x_0 > 0$, entonces $B(0) = \lim_{x \to 0^+} (L(p)/p) = L'(0^+) = x_0 / \mu$.

distribución, la curva B(p) es no decreciente. Su concavidad/convexidad depende de la forma de la distribución.

De Vergottini (1940) utiliza para representar la desigualdad la función V(·), dada por:

$$V:[0,1]\to R\ ,\ V(p)=\begin{cases}\dfrac{1-L(p)}{1-p}, & 0\le p<1,\\[2mm] \dfrac{x_M}{\mu}\ , & p=1.\end{cases} \qquad [3]$$

Es inmediato que V(p)≥1, 0≤p≤1. En caso de equidistribución es V(p)=1, 0≤p<1, mientras que si la concentración es máxima, V(p)=1/(1−p), 0≤p<1. La función V(·) es también no decreciente y, al igual que $B(\cdot)$, su concavidad/convexidad depende de la forma de la distribución.

Los valores de las funciones B(·) y V(·) son medias condicionadas relativas. En efecto, dado un nivel de renta $x\in[0,\ x_M]$, si p=F(x), las rentas medias de las distribuciones truncadas que resultan al restringir la variable X a los intervalos [0, x] y $[x,\ x_M]$, respectivamente, vienen dadas por[13]:

$$m(x)=E(X/X\le x)=\frac{1}{F(x)}\int_0^x sdF(s)=\mu\frac{L(p)}{p}=\mu B(p)\,, \qquad [4]$$

$$M(x)=E(X/X\ge x)=\frac{1}{1-F(x)}\int_x^{x_M} sdF(s)=\mu\frac{1-L(p)}{1-p}=\mu V(p)\,. \qquad [5]$$

Como consecuencia, si p=F(x) es la proporción de unidades cuya renta es menor (resp. mayor) o igual que x, B(p) (resp. V(p)) es el cociente entre la renta media de ese grupo y la media de la población. Por ejemplo, fijada una línea de pobreza, z, si p_z=F(z) es la proporción de pobres, $B(p_z)$ (resp. $V(p_z)$) es la renta media de los pobres (resp. no pobres) expresada como fracción de la renta media de la población.

Las curvas de Bonferroni y de De Vergottini, al igual que la de Lorenz, proporcionan una representación gráfica de la desigualdad y aunque cada una de ellas queda determinada por cualquiera de las otras dos, la información que ofrecen es diferente. Los valores de L(p) son participaciones en la renta total, mientras que los de B(p) y V(p) se refieren a niveles relativos de renta.

La Figura 1 muestra las gráficas de las curvas L(p), B(p) y V(p) asociadas a la distribución de renta disponible en España para 2007, utilizando los datos de la Encuesta de Condiciones de Vida 2008.

Figura 1.

[13] Sus funciones de distribución son: $F_{(0,x]}(z)=F(z)/F(x)$, 0<z≤x, $F_{[x,x_M]}(z)=((F(z)-F(x))/(1-F(x))$, z≥x.

A partir de cada una de las curvas anteriores se definen índices de desigualdad asociados a ellas. El coeficiente de Gini (1914), G, se define a través de la curva de Lorenz, $L(\cdot)$, mediante la expresión:

$$G = 2\int_0^1 (p - L(p))dp = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp \,. \qquad [6]$$

Las curvas $B(\cdot)$ y $V(\cdot)$ permiten definir los índices de Bonferroni (1930), B, y de De Vergottini (1940), V, respectivamente. Sus expresiones son:

$$B = 1 - \int_0^1 B(p)dp = 1 - \frac{1}{\mu}\int_0^{x_M} m(x)dF(x) \,. \qquad [7]$$

$$V = \int_0^1 V(p)dp - 1 = \frac{1}{\mu}\int_0^{x_M} M(x)dF(x) - 1 \,. \qquad [8]$$

La interpretación de los tres índices en términos de áreas es inmediata a partir de sus expresiones. Los índices G y B son coeficientes normalizados, cuyos valores pertenecen al intervalo [0,1], siendo G=B=0 si existe equidistribución y G=B=1, si la concentración es máxima. El índice V también es nulo si la distribución es igualitaria, pero no está acotado superiormente[14].

En Imedio y otros (2009c), se realiza un análisis comparativo de estos tres índices desde el punto de vista estadístico y normativo. Son medidas que presentan un conjunto de características comunes y una clara analogía formal, pero que incorporan juicios de valor diferentes y, en cierto modo, complementarios en la medición de la desigualdad y del bienestar. Interesa destacar que G, B y V son índices relativos de desigualdad, mientras que μG, μB y μV son índices absolutos. Son, por lo tanto, índices de compromiso[15]. Por otra parte, cada índice incorpora un criterio diferente al agregar la información contenida en la distribución. Las tres medidas presentan aversión a la desigualdad o preferencia por la igualdad[16], pero mientras que B centra su interés en la cola izquierda de la distribución y acusa en mayor medida aquellos

[14] No existe una cota superior válida para cualquier distribución de renta. Para una distribución dada cuya renta máxima sea x_M, $V\in[0, (x_M/\mu)-1]$.

[15] Un índice relativo (invariante frente a cambios proporcionales), I, es de compromiso si μI es un índice absoluto (invariante frente a cambios de origen). Un índice absoluto, J, es de compromiso si J/μ es un índice relativo (Blackorby y Donaldson, 1978).

[16] Un índice presenta aversión a la desigualdad si verifica el Principio de Transferencias de Pigou-Dalton. Es decir, si tiene lugar una transferencia de renta desde un individuo hacia otro más pobre, sin que varíe la ordenación relativa entre ambos (transferencia progresiva), el valor del índice disminuye. El índice B presenta una aversión a la desigualdad mayor que la de G. Su uso es adecuado si el interés se centra en la cola izquierda de la distribución (Nygard y Sandström, 1981). Por el contrario, V asigna más peso a la cola derecha de la distribución y su aversión a la desigualdad es menor que la de G.

cambios que afectan de forma preferente a las rentas bajas, el índice V incorpora el criterio contrario. En el índice de Gini subyace una postura intermedia entre ambas.

2.2. La clase $\boldsymbol{\beta}$ de medidas de desigualdad.

En lmedio y otros (2009a, 2009b) se propone y analiza una clase de medidas de desigualdad, a la que pertenecen índices de uso habitual, como los de Gini (1914) y Bonferroni (1930) e incluye, como casos particulares, familias conocidas en la literatura, como los Gini generalizados (Kakwani (1980), Yitzhaki (1983)) o las propuestas más recientemente en Aaberge (2007) e Imedio y otros (2011).

Los elementos de esta clase se expresan como medias ponderadas de la desigualdad local acumulada hasta cada percentil de renta, evaluando esa desigualdad mediante la función $1-B(p)=(p-L(p))/p$, $0<p\leq 1$, resultado de comparar la curva de Bonferroni de la distribución vigente con la correspondiente al caso de equidistribución ($B(p)=1$, $0<p\leq 1$). Se utilizan como ponderaciones las funciones de densidad de las distribuciones beta definidas sobre el intervalo [0, 1]:

$$\omega_{(s,t)}:[0,1]\rightarrow R^{+},\ \omega_{(s,t)}(p)=(B(s,t))^{-1}p^{s-1}(1-p)^{t-1}, s>0, t>0, \qquad [9]$$

siendo $B(s,t)$ la función beta de Euler.

Por lo tanto, para cada par de números reales positivos $(s,t)\in R^{+}\times R^{+}$, el índice de desigualdad $I(s,t)$ viene dado por:

$$I(s,t)=(B(s,t))^{-1}\int_{0}^{1}(1-B(p))p^{s-1}(1-p)^{t-1}dp\ . \qquad [10]$$

Cuando la desigualdad local se mide a partir de las diferencias de Lorenz, $p-L(p)=p(1-B(p))$, una expresión equivalente de los índices es:

$$I(s,t)=(B(s,t))^{-1}\int_{0}^{1}(p-L(p))p^{s-2}(1-p)^{t-1}dp\ . \qquad [11]$$

El conjunto biparamétrico $\boldsymbol{\beta}=\{I(s,t)\}_{s,t>0}$ es la clase beta de medidas de desigualdad.

Es inmediato que para cada $(s,t)\in R^{+}\times R^{+}$, $I(s,t)$ es un índice relativo de desigualdad, siendo $I(s,t)=0$ si existe equidistribución e $I(s,t)=1$ si la concentración es máxima. A la vez, $\mu I(s,t)$ es una medida absoluta, por lo que $I(s,t)$ es un índice de compromiso. Por lo tanto, $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A}}=\{\mu I(s,t)\}_{s,t>0}$ es una familia de medidas absolutas de desigualdad.

La clase $\boldsymbol{\beta}$ incorpora un conjunto muy amplio de criterios con relación a la importancia que el evaluador puede asignar a la desigualdad local acumulada en los diferentes tramos de la distribución. Estos criterios son consecuencia de la amplia variedad de formas de la función $\omega_{(s,t)}(\cdot)$, según los valores de los parámetros s y t. Se tiene:

(i) Si $0<s<1$, $0<t<1$, $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ tiene forma de U, siendo simétrica para s=t, y alcanza su valor mínimo en $p=(s-1)/(s+t-2)$.

(ii) Si $0<s<1$, $t\geq 1$, $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ es decreciente y convexa.

(iii) Si $s\geq 1$, $0<t<1$, $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ es creciente y convexa.

(iv) Si s=1 (resp. t=1), $t\geq 1$ (resp. $s\geq 1$), $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ es decreciente (resp. creciente), siendo $\omega_{(1,1)}(\cdot)=1$.

(v) Si $s>1$, $t>1$, $\omega_{(s,t)}(\cdot)$ es campaniforme, simétrica si s=t, alcanzando en $p=(s-1)/(s+t-2)$ su valor máximo.

Por lo tanto, en el caso (i) se pondera en menor medida la desigualdad acumulada en la parte intermedia de la distribución, tanto más centrada cuanto mayores y más próximos entre sí sean los valores de s y t, y en mayor medida sus extremos. En el caso (v) las ponderaciones siguen el criterio contrario: se asigna mayor peso a la parte intermedia y menor peso a los extremos. En los demás casos, excepto s=t=1, la mayor ponderación se asigna a la desigualdad local existente en una de las colas de la distribución.

En la Figura 2 se representan algunas de las funciones $\omega_{(s,t)}$ para diferentes valores de sus parámetros.

Figura 2. Funciones $\omega_{(s,t)}$

La clase $\boldsymbol{\beta}$ contiene no sólo índices conocidos, sino también familias de medidas de desigualdad habituales en la literatura. Para $(s,t)=(1,1)$ y $(s,t)=(2,1)$ se obtienen los coeficientes de Bonferroni (1930), B, y de Gini (1914), G, respectivamente:

$$I(1,1)=\int_0^1 (1-B(p))dp = B\,, \qquad [12]$$

$$I(2,1)=2\int_0^1 (p-L(p))dp = G\,. \qquad [13]$$

Para s=2 resulta la familia de los índices de Gini Generalizados ((Kakwani (1980), Yitzhaki (1983)), $\boldsymbol{\gamma}=\{I(2,t)\}_{t>0}$, siendo

$$I(2,t)=t(t+1)\int_0^1 (1-B(p))p(1-p)^{t-1}dp = t(t+1)\int_0^1 (p-L(p))(1-p)^{t-1}dp =$$

$$=1-t(t+1)\int_0^1 (1-p)^{t-1}L(p)dp\,,\ t>0. \qquad [14]$$

Si t=1 y $s\in N=\{1,2,...\}$ es un entero positivo, se obtiene la familia numerable $\boldsymbol{\alpha}=\{I(s,1)\}_{s\in N}$ definida en Aaberge (2007). Sus elementos se expresan como:

$$I(s,1) = s\int_0^1 (1-B(p))p^{s-1}dp = s\int_0^1 (p-L(p))p^{s-2}dp = 1 - s\int_0^1 p^{s-2}L(p)dp,\ s>0. \qquad [15]$$

Para s=1 y $t \in N$, resulta la familia **δ**=$\{I(1,t)\}_{t\in N}$ propuesta por Imedio y otros (2011), cuyos elementos son:

$$I(1,t) = t\int_0^1 (1-B(p))(1-p)^{t-1}dp = t\int_0^1 (p-L(p))p^{-1}(1-p)^{t-1}dp = 1 - t\int_0^1 (1-p)^{t-1}B(p)dp,\ t>0\ . \quad [16]$$

En el ámbito normativo, hay que señalar que con los elementos de **β** queda cubierto todo el espectro de la aversión a la desigualdad, desde la aversión máxima (máxima concavidad de la distribución de preferencias o leximin rawlsiano[17]) a la indiferencia (distribución de preferencias lineal, concavidad nula). En particular, en la familia **α** al aumentar el valor de su parámetro, sus índices presentan una aversión a la desigualdad decreciente y asignan un peso cada vez menor a las rentas bajas[18]. Sucede lo contrario con las familias **δ** y **γ**. En ellas los índices incorporan una aversión creciente a la desigualdad, centrando cada vez más su interés en la cola izquierda de la distribución, al aumentar el valor del parámetro.

3. Algunas definiciones de privación y satisfacción relativas.

Ya se ha señalado que la privación de un individuo, dado su nivel de renta, depende, entre otras circunstancias, de al menos dos factores: el grupo con el que se identifique (puede identificarse, o no, con un grupo concreto) y del conjunto de individuos que tome como referencia al establecer comparaciones. En función de este último aspecto, distinguimos dos situaciones, según que cada individuo considere, como ámbito de comparación, toda la distribución o se limite a un truncamiento de la misma.

3.1. Los individuos contemplan toda la distribución al comparar su situación con la de otros.

En este caso cada individuo compara su renta con todas y cada una de las del intervalo $[0, x_M]$.

En las definiciones que siguen, tanto la privación como la satisfacción entre individuos se identifican con la diferencia entre sus rentas[19].

[17] Centra su interés en la situación de los individuos con menor nivel de renta. Entre dos distribuciones prefiere aquella cuya renta mínima es mayor o, en caso de igualdad, aquella en que la renta mínima presente menor frecuencia. Este enfoque deriva de la teoría sobre la justicia social defendida por Rawls (1971).

[18] En Imedio y Bárcena (2007) se estudia esta cuestión con detalle, comparando el comportamiento, en ese contexto, de las familias **α** y **γ**.

[19] Si el interés de los individuos se centra en el status, más que en su nivel de renta, lo relevante sería el rango que ésta les asigna en la distribución. Este punto de vista se aborda en Imedio y Bárcena (2003).

Definición 1.

a) (Yitzhaki (1979), Hey y Lambert (1980)). La privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $P_{R,1}(x,z)$, viene dada por

$$P_{R,1}(x,z)=\begin{cases} z-x & ,\ \text{si } z>x \\ 0 & ,\ \text{si } z\leq x\ . \end{cases} \qquad [17]$$

b) (Hey y Lambert, 1980). De forma simétrica, la satisfacción de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $S_{R,1}(x,z)$, viene dada por

$$S_{R,1}(x,z)=\begin{cases} x-z & ,\ \text{si } x>z \\ 0 & ,\ \text{si } x\leq z\ . \end{cases} \qquad [18]$$

Es decir, la privación (satisfacción) de un individuo con un determinado nivel de renta respecto a quien tiene una renta mayor (menor) viene dada por la diferencia de rentas, y es nula respecto a quienes tienen rentas inferiores (superiores).

Con ello, los valores medios de la privación y de la satisfacción asociadas a un nivel de renta x, $P_{R,1}(x)$ y $S_{R,1}(x)$ respectivamente, son

$$P_{R,1}(x)=\int_0^{x_M} P_{R,1}(x,z)dF(z)=(1-F(x))(M(x)-x), \qquad [19]$$

$$S_{R,1}(x)=\int_0^{x_M} S_{R,1}(x,z)dF(z)=F(x)(x-m(x))\ , \qquad [20]$$

siendo M(x) (resp. m(x)) la renta media del conjunto de individuos con renta mayor o igual (resp. menor o igual) que x. Por lo tanto, $P_{R,1}(x)$ es el producto de la proporción de individuos con renta mayor que x y de la diferencia entre la renta media de ese grupo y x, mientras que $S_{R,1}(x)$ es el producto de la proporción de individuos con renta menor o igual que x y de la diferencia entre x y la renta media de ese grupo.

Es inmediato comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

$P_{R,1}(\cdot)$ es una función estrictamente decreciente del nivel de renta. [i]

$S_{R,1}(\cdot)$ es una función estrictamente creciente. [ii]

$$P_{R,1}(0)=\mu \qquad P_{R,1}(x_M)=0 \qquad [iii]$$

$$S_{R,1}(0)=0 \qquad S_{R,1}(x_M)=x_M-\mu \qquad [iv]$$

Se verifica $S_{R,1}(x)-P_{R,1}(x)=x-\mu$, x>0. Por lo tanto, $S_{R,1}(\mu)= P_{R,1}(\mu)$. Es decir, las funciones $P_1(\cdot)$ y $S_1(\cdot)$ se cortan en la renta media, de manera que para rentas inferiores a la media, la privación es mayor que la satisfacción. Sucede lo contrario para las rentas mayores que la media.

En el siguiente gráfico se representan las funciones $P_{R,1}(\cdot)$ y $S_{R,1}(\cdot)$, tomando como variable independiente p=F(x), correspondientes a la distribución de renta disponible en España, 2007.

Figura 3.

Las funciones de privación y de satisfacción relativas se cortan en p=0.59, percentil correspondiente a la renta media de la distribución, μ=14663 euros.

Los valores medios de la privación y de la satisfacción para el conjunto de la sociedad coinciden ambos con el índice absoluto de Gini, μG, de la distribución de rentas.

$$E(P_{R,1}(X)) = \int_0^{x_M} P_{R,1}(x)dF(x) = \mu G \, , \tag{21}$$

$$E(S_{R,1}(X)) = \int_0^{x_M} S_{R,1}(x)dF(x) = \mu G \, . \tag{22}$$

En este caso, al considerar el conjunto de la sociedad, privación y satisfacción quedan compensadas.

Supongamos que un individuo con renta x, al experimentar privación respecto a las rentas mayores que la suya, las del intervalo $(x, x_M]$, se considera miembro del conjunto de individuos cuya renta es menor o igual que x, las del intervalo [0, x], e identifica su situación con la renta media del mismo[20], m(x). Esta postura, y su simétrica en el caso de la satisfacción, darían lugar a la siguiente definición.

Definición 2.

a) (Bárcena e Imedio, 2008) La privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $P_{R,2}(x,z)$, viene dada por

$$P_{R,2}(x,z) = \begin{cases} z - m(x) \ , \ \text{si} \ \ z > x \\ 0 \, , \qquad\qquad \text{si} \ \ z \le x \ . \end{cases} \tag{23}$$

b) La satisfacción de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, $S_{R,2}(x,z)$, viene dada por

$$S_{R,2}(x,z) = \begin{cases} M(x) - z \ , \ \text{si} \ \ z < x \\ 0 \, , \qquad\qquad \text{si} \ \ z \ge x \ . \end{cases} \tag{24}$$

[20] En la Definición 1, el individuo considera que su situación queda determinada por su nivel de renta. Ahora, un individuo cuya renta, x, no sea la mínima, siente una especie de altruismo en el sentido de que se identifica con quienes están en peor situación (a través de su renta media), lo que aumenta su privación respecto a la expresada en la Definición 1.

Según esta definición, la privación y la satisfacción medias asociadas al nivel de renta x son

$$P_{R,2}(x) = \int_0^{x_M} P_{R,2}(x,z)dF(z) = (1-F(x))(M(x)-m(x)) = \mu - m(x). \qquad [25]$$

$$S_{R,2}(x) = \int_0^{x_M} S_{R,2}(x,z)dF(z) = F(x)(M(x)-m(x)) = M(x)-\mu. \qquad [26]$$

Es decir, $P_{R,2}(x)$ es el producto de la proporción de individuos con renta mayor que x y de la diferencia entre las rentas medias de los intervalos $[x, x_M]$ y $[0, x]$. De forma más breve, $P_{R,2}(x)$ es la diferencia entre la renta media de la población y la renta media del conjunto de individuos con renta menor que x. Para todo $x>0$, $P_{R,2}(x) \geq P_{R,1}(x)$. Por su parte, $S_{R,2}(x)$ es el producto de la proporción de individuos con renta menor o igual que x y de la diferencia entre las rentas medias de los intervalos $[x, x_M]$ y $[0, x]$, lo que coincide con la diferencia entre la renta media de los individuos con renta mayor x y la renta media de la población. Para todo $x>0$, $S_{R,2}(x) \geq S_{R,1}(x)$.

Las funciones $P_{R,2}(\cdot)$ y $S_{R,2}(\cdot)$ satisfacen las mismas propiedades que en la formulación anterior. En este caso, ambas funciones se cortan en la renta mediana (Me), F(Me)=0.5. Se cumple: $P_{R,2}(Me)=S_{R,2}(Me)=\mu-2L(0.5)$. Para las rentas inferiores a la mediana, la privación es mayor que la satisfacción y sucede lo contrario para las rentas mayores que la mediana.

En el siguiente gráfico se representan las funciones $P_{R,2}(\cdot)$ y $S_{R,2}(\cdot)$, correspondientes a la distribución de renta disponible en España, 2007.

Figura 4.

Las funciones de privación y de satisfacción relativas se cortan en p=0.50, percentil correspondiente a la renta mediana de la distribución, Me=12979 euros.

La privación media para el conjunto de la población viene dada por el índice absoluto de Bonferroni, mientras que la satisfacción media de la población coincide con el índice absoluto de De Vergottini. A partir de [7] y de [8], se tiene

$$E(P_{R,2}(X)) = \int_{x_m}^{x_M} (\mu - m(x)dF(x) = \mu\left(1-\int_0^1 \frac{L(p)}{p}dp\right) = \mu B. \qquad [27]$$

$$E(S_{R,2}(X)) = \int_{x_m}^{x_M} (M(x)-\mu)dF(x) = \mu\left(\int_0^1 \frac{1-L(p)}{1-p}dp - 1\right) = \mu V. \qquad [28]$$

En este caso, excepto si la distribución es igualitaria, $E(P_{R,2}(X)) \neq E(S_{R,2}(X))$. Además, dado que para cualquier distribución es G≤B y G≤V, se verifica $E(P(_{R,2}(X)) \geq E(P(_{R,1}(X))$ y $E(S(_{R,2}(X)) \geq E(S(_{R,1}(X))$.

En las dos definiciones anteriores los individuos, al comparar su nivel de renta con el de los demás, contemplan la distribución de la renta en su totalidad. Al evaluar su privación (resp. satisfacción), el individuo considera a quienes tienen una renta menor (resp. mayor) que la suya aunque su privación (resp. satisfacción) hacia ellos sea nula.

3.2. Los individuos truncan la distribución al comparar su situación con la de otros.

También cabe la posibilidad de que los individuos, a la hora de valorar su privación, ignoren a quienes tienen rentas menores que la suya, comparándose únicamente con quienes tienen una renta mayor. El individuo con renta x, sólo se compara con los individuos cuyas rentas pertenecen al intervalo $(x, x_M]$. En otros términos, el individuo "no mira hacia atrás". Este modo de proceder equivale formalmente a considerar la distribución truncada a la izquierda que determina una renta dada. Al formular la satisfacción se ignora a quienes tienen rentas mayores que la propia, comparándose sólo con quienes tienen una renta menor, considerando la distribución truncada a la derecha.

Estas actitudes por parte de los individuos darían lugar a la definición siguiente.

Definición 3.

a) (Bárcena e Imedio, 2008) La privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, z>x, viene dada por

$$P_{R,3}(x,z) = z - x \, , \, z > x \, . \qquad [29]$$

b) La satisfacción de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, z<x, es

$$S_{R,3}(x,z) = x - z \, , \, z < x \, . \qquad [30]$$

Por lo tanto, fijado x, $P_{R,3}(x,z)$ sólo está definida en el intervalo de renta $(x, x_M]$, mientras que $S_{R,3}(x, z)$ lo está en $[0, x)$.

Para obtener la privación y la satisfacción medias asociadas al nivel de renta x, habrá que considerar las distribuciones truncadas que resultan al restringir la variable renta a los intervalos $(x, x_M]$ y $[0, x)$, respectivamente. De ese modo, resulta

$$P_{R,3}(x) = \frac{1}{1-F(x)} \int_{x}^{x_M} P_{R,3}(x,z)dF(z) = M(x) - x \, , \qquad [31]$$

$$S_{R,3}(x) = \frac{1}{F(x)} \int_{x_m}^{x} S_{R,3}(x,z)dF(z) = x - m(x) \, . \qquad [32]$$

Es decir, $P_{R,3}(x)$ es la diferencia entre la renta media del intervalo $(x, x_M]$ y x, y $S_{R,3}(x)$ es la diferencia entre x y la renta media del intervalo $[0, x)$.

Las expresiones [19] y [20] indican que al contemplar la población total, tanto la privación como la satisfacción asociadas a cada nivel de renta son menores que las obtenidas al truncar la distribución. Ello es consecuencia de que en el primer caso ambas magnitudes son nulas en un tramo de la distribución, mientras que en el segundo, al prescindir de ese tramo, son siempre positivas.

Las funciones $P_{R,3}(\cdot)$ y $S_{R,3}(\cdot)$ verifican, como en los casos anteriores, las propiedades (iii) e (iv), pero no son, en general, funciones monótonas de la renta. Su comportamiento, a este respecto, depende de las características de cada distribución de rentas[21]. En la siguiente figura se muestran las gráficas de las funciones $P_{R,3}(\cdot)$ y $S_{R,3}(\cdot)$, correspondientes a la distribución de renta disponible en España, 2007.

Figura 5.

$S_{R,3}(\cdot)$ es creciente a lo largo de la escala de rentas. $P_{R,3}(\cdot)$ es decreciente hasta aproximadamente el percentil 85, a partir del cual presenta ligeras oscilaciones hasta anularse en la renta máxima. Ambas funciones se cortan cerca del tercer cuartil, en p=0.748, siendo x=18447 euros.

Los valores medios de $P_{R,3}(\cdot)$ y $S_{R,3}(\cdot)$ son índices absolutos de desigualdad.

$$E(P_{R,3}(X)) = \int_{x_m}^{x_M} (M(x)-x)dF(x) = \mu\left(\int_0^1 \frac{1-L(p)}{1-p}dp - 1\right) = \mu V\,. \qquad [33]$$

$$E(S_{R,3}(X)) = \int_{x_m}^{x_M} (x-m(x))dF(x) = \mu\left(1-\int_0^1 \frac{L(p)}{p}dp - 1\right) = \mu B\,. \qquad [34]$$

La privación media de la sociedad coincide con el índice absoluto de De Vergottini, mientras que la satisfacción social media es el índice absoluto de Bonferroni.

Las formulaciones anteriores, en las que las comparaciones entre individuos se realizan en términos de diferencias de renta, permiten interpretar cada uno de los tres índices absolutos μG, μB y μV tanto como medidas de la privación media de una población, como medidas de su satisfacción, dependiendo de la definición utilizada. Esto es:

- El índice absoluto de Gini, μG, proporciona tanto la privación como la satisfacción social media cuando los individuos contemplan toda la distribución y no se identifican con ningún grupo.

[21] Por ejemplo, para una distribución uniforme en $[0, x_M]$ $M(x)-x=(x_M-x)/2$ es estrictamente decreciente, mientras que $x-m(x)=x/2$ es estrictamente creciente. Sin embargo, para la distribución $F(x)=(x/x_M)^{1/2}$, $M(x)-x$ presenta un máximo relativo en p=1/4, p=F(x), y es decreciente para p>1/4. La función $x-m(x)$ es creciente.

- El índice absoluto de Bonferroni, μB, se obtiene como índice de privación social cuando los individuos se identifican con quienes tienen renta menor que la suya. Es una medida de satisfacción social cuando los individuos truncan la distribución e ignoran a quienes tienen rentas mayores que la propia.
- El índice absoluto de De Vergottini, μV, es una medida de privación social cuando los individuos truncan la distribución e ignoran a quienes tienen rentas menores que la suya. Es una medida de satisfacción social cuando los individuos se identifican con quienes tienen rentas mayores que la suya.

Por otra parte, las funciones de privación relativa y sus valores medios permiten obtener funciones de bienestar social (FBS) consistentes con los índices de Gini, de Bonferroni y de De Vergottini. Para ello, se definen funciones de utilidad lineales en la renta restando la desutilidad derivada de la privación; es decir:

$$U(x,F) = ax - bP(x), a > 0, b > 0 .$$

La utilidad media o bienestar asociado a la distribución es

$$W = \int_0^{x_M} U(x,F(x))dF(x) = a\mu - bE(P(X)) .$$

En particular, cuando la privación viene dada mediante las expresiones [19], [25] y [31], resultan las FBSs consistentes[22] con los índices citados:

$$W_1 = \mu(a - bG)$$

$$W_2 = \mu(a - bB)$$

$$W_3 = \mu(a - bV)$$

Si a=b=1, resultan las rentas equivalentes de equidistribución asociadas a G, B y V, respectivamente.

4. Ponderando la privación y la satisfacción. Nuevos índices.

Las medidas de privación y de satisfacción social obtenidas en la sección anterior son los valores esperados de las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación o su satisfacción. Cabe la posibilidad de que el evaluador social al agregar estas magnitudes a lo largo de la distribución quiera discriminar entre los distintos tramos de la misma, asignándoles diferentes pesos. Esto se consigue calculando los valores sociales medios de las magnitudes estudiadas a través de medias ponderadas, utilizando distintos esquemas de ponderación. Al considerar una familia de ponderaciones, dependiente de parámetros reales, se obtienen distintas valoraciones de la privación o de la satisfacción, al variar dichos parámetros.

[22] Una FBS, W, es consistente con el índice de desigualdad I si para dos distribuciones cualesquiera F y G, con la misma renta media, se verifica $I(F) \leq I(G) \leftrightarrow W(F) \geq W(G)$.

En particular, con la familia de ponderaciones

$$\omega_{(s,t)}:[0,1]\rightarrow R^{+},\ \omega_{(s,t)}(p)=(B(s,t))^{-1}p^{s-1}(1-p)^{t-1}, s>0, t>0, \qquad [9]$$

las medias ponderadas de las funciones de privación y de satisfacción, obtenidas en la sección anterior, se expresan a partir de los elementos de la familia $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A}}=\{\mu I(s,t)\}_{s,t>0}$, dándoles una interpretación ética en estos términos.

Al ponderar cada una de las funciones [19], [20], [25], [26], [31] y [32] con $\omega_{(s,t)}(\cdot)$, resultan las siguientes medias ponderadas:

$$E_{\omega}(P_{R,1}(X))=\int_{0}^{x_M}P_{R,1}(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x)=\frac{\mu}{s+t}[s(t+1)I(s+1,t)-(s-1)tI(s,t+1)] \qquad [35]$$

$$E_{\omega}(S_{R,1}(X))=\int_{0}^{x_M}S_{R,1}(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x)=\frac{s(s+1)}{s+t}\mu[I(s+1,t)-I(s+2,t-1)],\ t>1. \qquad [36]$$

Para t=1 resulta $E_{\omega}(S_{R,1}(X))=s\mu I(s+1,1)$.

$$E_{\omega}(P_{R,2}(X))=\int_{0}^{x_M}P_{R,2}(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x)=\mu I(s,t). \qquad [37]$$

$$E_{\omega}(S_{R,2}(X))=\int_{0}^{x_M}S_{R,2}(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x)=\frac{s}{t-1}\mu I(s+1,t-1),\ t>1. \qquad [38]$$

$$E_{\omega}(P_{R,3}(X))=\int_{0}^{x_M}P_{R,3}(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x)=\frac{st}{t-1}\mu I(s+1,t-1)-\mu(s-1)I(s,t),\ t>1. \qquad [39]$$

$$E_{\omega}(S_{R,3}(X))=\int_{0}^{x_M}S_{R,3}(x)\omega_{(s,t)}(F(x))dF(x)=s\mu[I(s,t)-I(s+1,t-1)],\ t>1. \qquad [40]$$

Si t=1, $E_{\omega}(S_{R,3}(X))=s\mu I(s,1)$.

Las expresiones anteriores nos permiten concluir que:

- Las medias ponderadas que se obtienen al promediar las funciones de privación y de satisfacción que derivan de las Definiciones 1, 2 y 3 de la sección anterior, con la familia de pesos $\omega_{(s,t)}(\cdot)$, se expresan a partir de un índice de la clase $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A}}=\{\mu I(s,t)\}_{s,t>0}$, o de una combinación lineal de ellos.
- Cada uno de los elementos de $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{A}}$ se puede interpretar como una medida de privación social, como consecuencia de [37].

Si en la función peso se fija el valor de uno de sus parámetros, se obtienen como medidas de privación o de satisfacción social, subfamilias de $\boldsymbol{\beta}_{A}$ ya conocidas en la literatura. A continuación se consideran varios casos.

Para s=1, se pondera con $\omega_{(1,t)}(p)=t(1-p)^{t-1}$, función estrictamente decreciente de p si t>1 y estrictamente creciente si 0<t<1. Además, para t>1, la tasa de decrecimiento aumenta al hacerlo t, asignando cada vez mayor peso a las rentas bajas. Al aplicar $\omega_{(1,t)}(\cdot)$ a las funciones de privación resulta:

$$E_{\omega_{(1,t)}}(P_{R,1}(X)) = \int_0^{x_M} P_{R,1}(x)\omega_{(1,t)}(F(x))dF(x) = \mu I(2,t),$$

la familia $\boldsymbol{\gamma}$ de los Gini generalizados[23] (Yitzhaki, 1983).

Cuando se aplica $\omega_{(1,t)}(\cdot)$ a $P_{R,2}(\cdot)$, se tiene:

$$E_{\omega_{(1,t)}}(P_{R,2}(X)) = \int_0^{x_M} P_{R,2}(x)\omega_{(1,t)}(F(x))dF(x) = \mu I(1,t).$$

Es la familia $\boldsymbol{\delta}$ propuesta por Imedio y otros (2011), cuyos elementos presentan mayor aversión a la desigualdad que los de la familia anterior[24].

Al ponderar $P_{R,3}(\cdot)$ con $\omega_{(1,t)}(\cdot)$, resulta:

$$E_{\omega_{(1,t)}}(P_{R,3}(X)) = \int_0^{x_M} P_{R,3}(x)\omega_{(1,t)}(F(x))dF(x) = \frac{t}{t-1}\mu I(2,t),\ t>1.$$

Se obtienen, de nuevo, los Gini generalizados multiplicados por una constante que varía según el orden del índice.

Si t=1, la ponderación es $\omega_{(s,1)}(p) = sp^{s-1}$, mientras que para t=2 es $\omega_{(s,2)}(p) = s(s-1)p^{s-1}(1-p)$. Para s>1, $\omega_{(s,1)}(\cdot)$ es estrictamente creciente, pondera en mayor medida las rentas altas, mientras que $\omega_{(s,2)}(\cdot)$ es campaniforme y asigna mayor ponderación a distintos tramos de rentas intermedias, según los valores del parámetro s. Al aplicar estos pesos a las funciones de satisfacción, resulta:

$$E_{\omega_{(s,1)}}(S_{R,1}(X)) = \int_0^{x_M} S_{R,1}(x)\omega_{(s,1)}(F(x))dF(x) = s\mu I(s+1,1).$$

$$E_{\omega_{(s,2)}}(S_{R,2}(X)) = \int_0^{x_M} S_{R,2}(x)\omega_{(s,2)}(F(x))dF(x) = s\mu I(s+1,1).$$

$$E_{\omega_{(s,1)}}(S_{R,3}(X)) = \int_0^{x_M} S_{R,3}(x)\omega_{(s,1)}(F(x))dF(x) = s\mu I(s,1).$$

En los tres casos anteriores, la satisfacción social media ponderada se expresa en función de los índices de la familia $\boldsymbol{\alpha}$ propuesta por Aaberge (2007), que presentan menor aversión a la desigualdad que los Gini generalizados y los de la familia $\boldsymbol{\delta}$.

En general, la media ponderada de una función de privación/satisfacción utilizando un peso decreciente (resp. creciente) se expresa a partir de índices que incorporan mayor (resp. menor) aversión a la desigualdad que la media simple de dicha función, como consecuencia de asignar mayor peso a las rentas bajas (resp. altas). Cuando la ponderación no es monótona, es

[23] En Bárcena, Imedio y Martín (2003) se llega a este resultado utilizando otro enfoque.
[24] En el sentido siguiente: para t≥1, el índice I(1,t) presenta mayor aversión a la desigualdad que I(2,t).

campaniforme o en forma de U, el resultado depende de cada caso concreto. Veamos algunos ejemplos.

En la Figura 6 se representa la gráfica de $\omega_{(1,3)}(p) = 3(1-p)^2$, 0<p<1, estrictamente decreciente, junto a los pares de funciones $P_{R,1}(\cdot)$ y $P_{R,1}(\cdot)\omega_{(1,3)}(\cdot)$, $P_{R,2}(\cdot)$ y $P_{R,2}(\cdot)\omega_{(1,3)}(\cdot)$.

Figura 6

En los gráficos anteriores se aprecia en qué medida la aplicación de la ponderación $\omega_{(1,3)}(\cdot)$ afecta a las funciones de privación iniciales. En cuanto a los valores de la privación social, se tiene:

$$E(P_{R,1}(X)) = \mu G = \mu I(2,1), \quad E_{\omega_{(1,3)}}(P_{R,1}(X)) = \mu I(2,3).$$

$$E(P_{R,2}(X)) = \mu B = \mu I(1,1), \quad E_{\omega_{(1,3)}}(P_{R,2}(X)) = \mu I(1,3).$$

Al haber utilizado una ponderación que asigna mayor peso a las rentas bajas y decrece en las intermedias y más aún en las rentas altas, en el caso de $P_{R,1}$ hemos pasado del Gini ordinario, I(2,1), al generalizado de orden tres, I(2,3), con mayor aversión a la desigualdad. Análogamente, para $P_{R,2}$ hemos obtenido, al ponderar, el índice I(1,3) de la familia $\boldsymbol{\delta}$ que incorpora mayor preferencia por la igualdad que el índice de Bonferroni, I(1,1).

En la Figura 7 se representa el peso $\omega_{(3,1)}(p) = 3p^2$, 0<p<1, estrictamente creciente, y el par de funciones $S_{R,1}(\cdot)$ y $S_{R,1}(\cdot)\omega_{(3,1)}(\cdot)$.

Figura 7

El peso utilizado pondera en mayor medida las rentas altas y es menor para las intermedias y bajas. Su incidencia sobre la satisfacción social es:

$$E(S_{R,1}(X)) = \mu G = \mu I(2,1), \quad E_{\omega_{(3,1)}}(S_{R,1}(X)) = 3\mu I(4,1).$$

Al ponderar, la satisfacción social se expresa a partir del índice I(4,1) de la familia $\boldsymbol{\alpha}$ que presenta menor aversión a la desigualdad que el índice de Gini, I(2,1).

Si ponderamos con $\omega_{(2,2)}(p) = 6p(1-p)$, campaniforme y simétrica respecto a p=0,5, se asigna mayor peso a las rentas intermedias y un peso menor a las de los extremos de la distribución. En la Figura 8, se representa $\omega_{(2,2)}(\cdot)$ y el par de funciones $S_{R,2}(\cdot)$ y $S_{R,2}(\cdot)\omega_{(2,2)}(\cdot)$.

Figura 8

En este caso, los valores medios, sin y con ponderación, son:

$$E(S_{R,2}(X)) = \mu V, \quad E_{\omega_{(2,2)}}(S_{R,2}(X)) = 2\mu I(3,1).$$

Se expresan a partir del índice de De Vergottini,V, y del índice I(3,1), perteneciente a la familia **α**. La comparación entre ambos según su grado de aversión a la desigualdad no es inmediata[25].

5. Conclusiones.

En cualquier formulación de la privación/satisfacción relativa están presentes los aspectos normativos. En cada una de sus etapas subyace un conjunto de juicios de valor.

En primer lugar, en la definición de la privación/satisfacción interindividual hay que especificar:

- Cómo identifica el individuo su situación: con su propia renta o con la media de algún grupo.
- Con quienes se compara: con toda la distribución o con un truncamiento de la misma.

Lo anterior condiciona las características de las funciones que asignan a cada nivel de renta su privación o su satisfacción.

En segundo lugar, al obtener los valores medios de las funciones anteriores, se puede utilizar:

- Una media simple.
- Una media ponderada que discrimine entre los diferentes tramos de la escala de rentas mediante el uso de ponderaciones.

El proceso anterior implica que medidas de desigualdad de naturaleza muy diversa, en cuanto a su aversión a la desigualdad, admitan una interpretación como índices de privación/satisfacción social. En este trabajo se demuestra que los índices absolutos de Gini, de Bonferroni y de De Vergottini, así como los elementos de la familia β_A satisfacen esa condición.

En este trabajo hemos considerado que es el evaluador social quien asigna distintos pesos a la privación asociada a los diferentes tramos de renta. Un enfoque alternativo consistiría en que el propio individuo introdujera un esquema de ponderación al agregar la privación que siente respecto a los demás. Es razonable pensar que asigne más peso a la privación que experimenta respecto a los individuos que se encuentran en una situación que considera “alcanzable” o próxima, y menos peso a las situaciones que percibe como “inaccesibles”. Esta es una cuestión pendiente de estudio, con evidentes dificultades formales, que trataremos de abordar en trabajos posteriores.

[25] Ambos presentan una aversión a la desigualdad menor que el índice de Gini. La comparación directa entre ellos se realizaría a partir del grado de concavidad de sus respectivas distribuciones de preferencias sociales.

Referencias.

Aaberge, R. (2000), “Characterizations of Lorenz curves and income distributions”, *Social Choice and Welfare* 17, pp. 639-653.

Aaberge, R. (2007), “Gini’s nuclear family”, *Journal of Economic Inequality*, 5/3, pp. 305-322.

Atkinson, A. B. (1970), “On the measurement of inequality”, *Journal of Economic Theory* 2, pp. 244-263.

Bárcena, E. (2003), *Privación, bienestar e imposición sobre la renta*, Investigaciones 1/03, Instituto de Estudios Fiscales.

Bárcena, E. y L. J. Imedio (2008): “The Bonferroni, Gini and De Vergotini indices. Inequality, welfare and deprivation in the European Union in 2000”. Research on Economic Inequality, Vol. 16, pp. 231-257. Ed. John Bishop and Buhong Zheng. Inequality and Opportunity: Papers from the Second ECINEQ Society Meeting. JAI Press.

Bárcena Martín, E., Imedio Olmedo, L. J. y G. Martín Reyes (2003): "Privación relativa, imposición sobre la renta e índice de Gini generalizado". Instituto de Estudios Fiscales. Papeles de Trabajo, Nº 6/03.

Berrebi, Z.M. y J. Silber (1985): “Income inequality indices and deprivation: a generalisation”, *Quarterly Journal of Economics*, 100,pp. 807-810.

Blackorby, C. y D. Donaldson (1978): “Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare”, *Journal of Economic Theory*, 18: 59-80.

Bonferroni, C. E. (1930): *Elementi di statistica generale*, Libreria Seber, Firenze.

Chakravarty, S. R. (1997): “Relative deprivation and satisfaction orderings”, *Indian Statistical Institute*, Calcuta, India.

Chakravarty, S. R. (2007): “A deprivation-based axiomatic characterization of the absolute Bonferroni index of inequality”, *Journal of Economic Inequality* 3, pp. 339-351

Chakravarty, S. R. y A. B. Chakraborty (1984): “On indices of relative deprivation”, *Economic Letters*, 14, pp. 283-287.

Chakravarty, S. R., Chattopadhyay, N. y A. Majumder (1995): “Income inequality, and relative deprivation”, *Keio Economics Studies*, 32.

Chakravarty, S. R. y D. Mukherjee (1998): “Lorenz domination, utilitarian deprivation rule and equal sacrifice principle”, *The Manchester School Journal*, 66, pp. 521-531.

Chakravarty, S. R. y D. Moyes (2003): “Individual welfare, social deprivation and income taxation”, *Economic Theory*, 21, pp. 843-869.

Cowell, F. A. y U. Ebert (2004): “Complaints and inequality”, *Social Choice and Welfare*, 61, pp. 61-89.

Crosby, F (1976): “A model of egoistical relative deprivation”, *Psychological Review*, 83, pp. 85-113.

Crosby, F (1979): “Relative deprivation revisited: A reponse to Miller, Bolce and Halligan”, *American Political Science Review*, 73: 103-112.

Davis, J. (1959): “A formal interpretation of the theory of the relative deprivation”, *Sociometry*, 20: 280-296.

De Vergottini, M. (1940): “Sul signifacoto di alcuni indici di concentrazione”, *Giornale degli economisti e annali di economia*, 11: 317-347.

Ebert, U. y P. Moyes (2000): "An axiomatic characterization of Yitzhaki´s index of individual deprivation", *Economics Letters*, 68, pp. 263-270.

Eurostat (2010), “*Cross-sectional EUSILC UDB 2008 microdata*”, Release 01-03-10, European Commission, Eurostat.

Gini, C. (1914), “Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri”, Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 73, pp. 1203-1248.

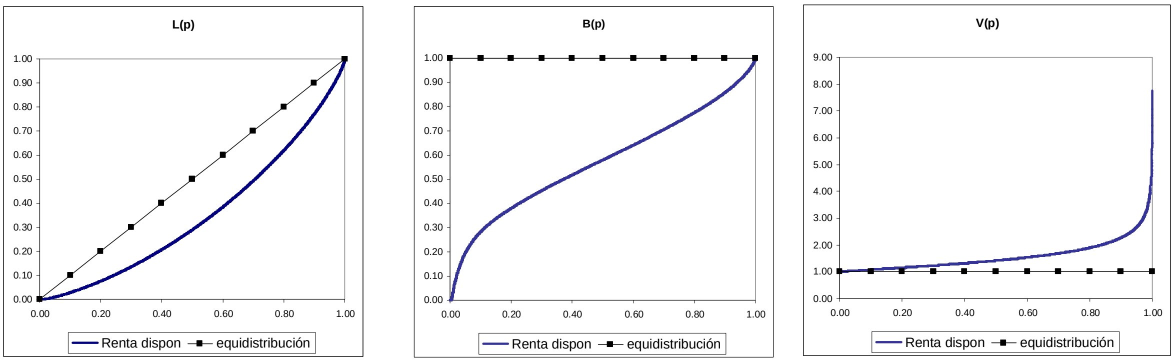
Giorgi, G. M. y M. Creszenci (2001): “A look a the Bonferroni inequality measure in a reliability framework”, *Statistica*, 41: 571-573.

Gurr, T. R. (1968): “A causal model of the civil strife: A comparative analysis using new indices”, *American political science review*, 62: 1104-1124.

Hey, J. D. y P. J. Lambert (1980): “Relative deprivation and the Gini coefficient: comment”, *Quarterly Journal of Economics*, 95: 567-573.

Imedio Olmedo, L. J. y E. Bárcena Martín (2003): "Privación relativa, status e imposición sobre la renta". *Estudios de Economía Aplicada*, Vol. 21-1.
Imedio Olmedo, L. J. y E. Bárcena Martín (2007): “Dos familias numerables de medidas de desigualdad”, *Investigaciones Económicas* XXX(1), pp. 191-217.
Imedio Olmedo, L. J., Parrado Gallardo, E. M. y M.D. Sarrión (1999): “Privación relativa e imposición sobre la renta”, *Hacienda Pública Española*, 149, pp. 137-145.
Imedio Olmedo, L. J., Bárcena Martín, E. y E. M. Parrado Gallardo (2009a): “La clase beta de medidas de desigualdad”, Papeles de trabajo, IEF, 11/2009.
Imedio Olmedo, L. J., Bárcena Martín, E. y E. M. Parrado Gallardo (2009b): “A wide class of inequality measures based on the Bonferroni curve”, at the Cornell University/London School of Economics “Inequality: New Directions” conference held in Ithaca, New York, September, 2009.
Imedio Olmedo, L. J., Bárcena Martín, E. y E. M. Parrado Gallardo (2009c): “Tres medidas complementarias de desigualdad”, *Estadística Española*, Vol. 51, Nº 171, pp. 363-394.
Imedio Olmedo, L. J., Bárcena Martín, E. y Parrado Gallardo, E. M. (2011): “A class of Bonferroni Inequality Indices”, *Journal of Public Economic Theory*, 13(1), pp. 97-124.
Kakwani, N. C. (1980), “On a class of poverty measures”, *Econometrica* 48, pp. 437-446.
Magdalou, B. y P. Moyes (2009): “Deprivation, welfare and inequality” *Social Choice and Welfare*, 32(2), pp. 253-273.
Nygard, F. y A. Sandström (1981): *Measuring income inequality*, Almqvist and Wicksell International, Stockholm.
Paul, S. (1991): “An index of relative deprivation”, *Economics Letters*, 36, pp. 337-341.
Piesch, W. (2005): “Bonferroni-index und De Vergottini-index”, *Diskussionspapiere aus dem Institut für Volkswirtschaftslehre der Universität Hohenheim*, 520.
Podder, N. (1996): “Relative deprivation, envy and economic inequality”, *Kiklos*, 49, pp. 353-376.
Rawls, J. (1971), *A theory of justice*, Harvard University Press, Cambridge.
Runciman, W. G. (1966): *Relative deprivation and social justice*, Routledge, London.
Sen, A. K. (1973), *On economic inequality*, Clarendon Press, Oxford.
Stouffer, S. A., Suchman, E. A., De Vinney, L. C., Star, S. A. y R. M.Williams (1949): *The American soldier: adjustment during army life*, Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.
Temkin, L. S. (1986): “Inequality”, *Philosophy and Public Affairs* 15, pp. 99-121.
Temkin, L. S. (1993): *Inequality*, Oxford: Oxford University Press.
Yitzhaki, S. (1979), “Relative deprivation and the Gini coefficient”, *Quarterly Journal of Economics*, 95, pp. 321-324.
Yitzhaki, S. (1982), “Relative deprivation and economic welfare”, *European Economic Review*, 17, pp. 99-113.
Yitzhaki, S. (1983), “On an extension of the Gini index”, *International Economic Review* 24, pp. 617-628.

Figura 1. Curva de Lorenz, L(p), Curva de Bonferroni, B(p) y Curva de De Vergottini, V(p).



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008

Figura 2. Funciones $\omega_{(s,t)}$

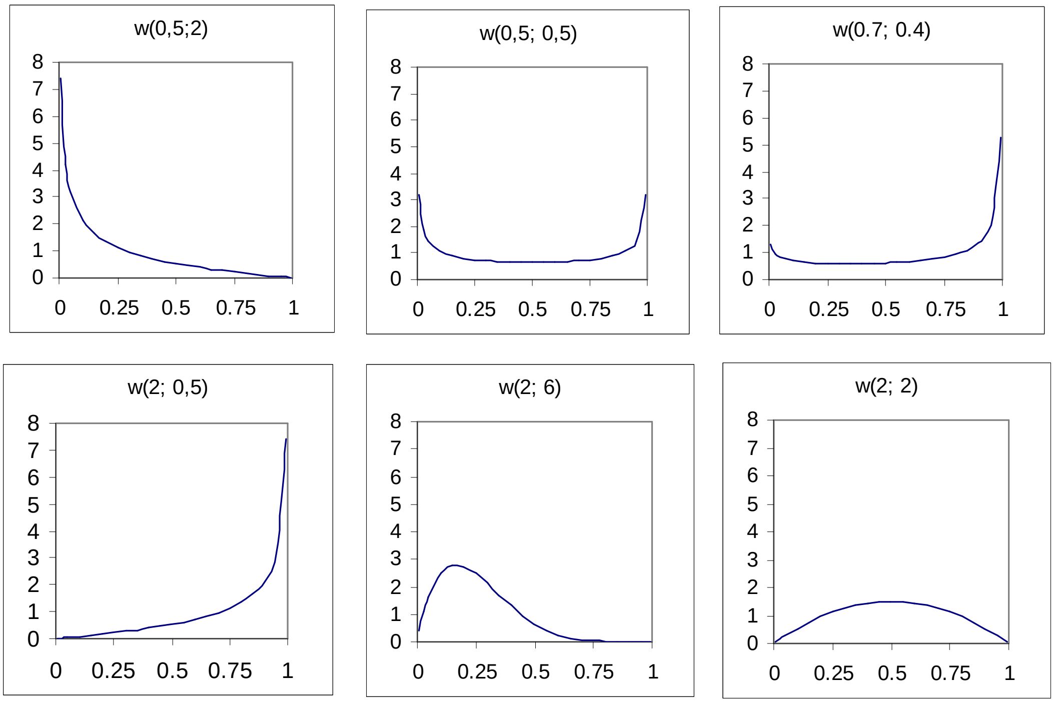
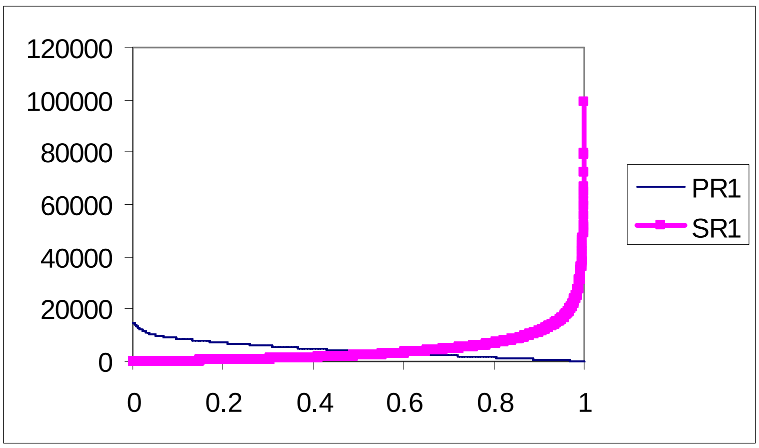
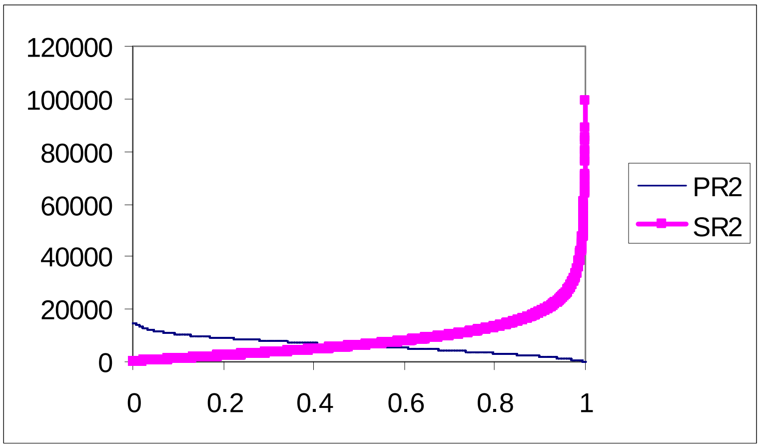


Figura 3. $P_{R,1}(\cdot)$ y $S_{R,1}(\cdot)$



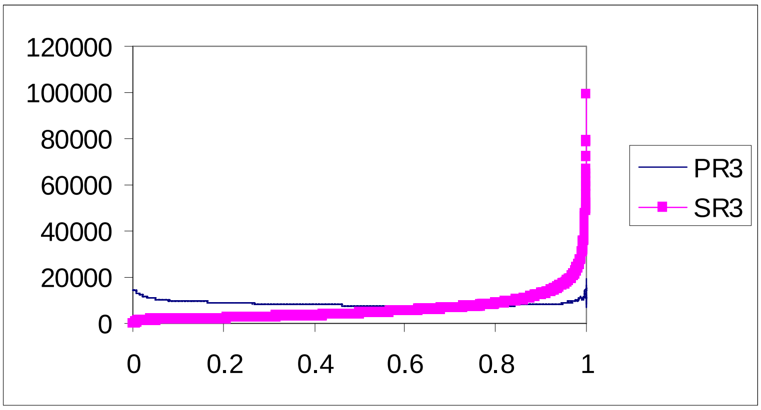
Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008

Figura 4. $P_{R,2}(\cdot)$ y $S_{R,2}(\cdot)$



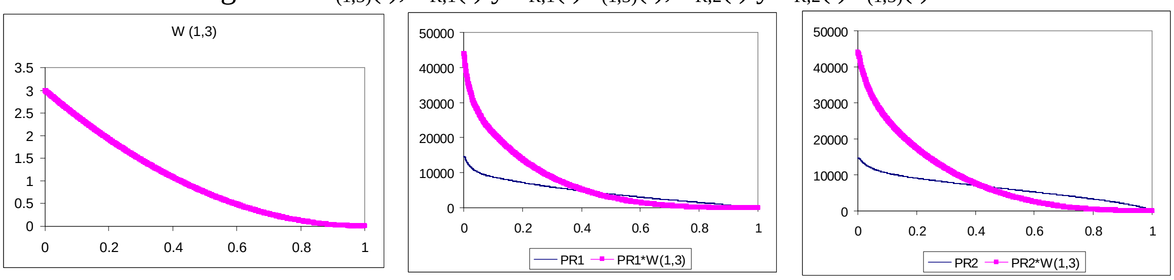
Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008

Figura 5. $P_{R,3}(\cdot)$ y $S_{R,3}(\cdot)$



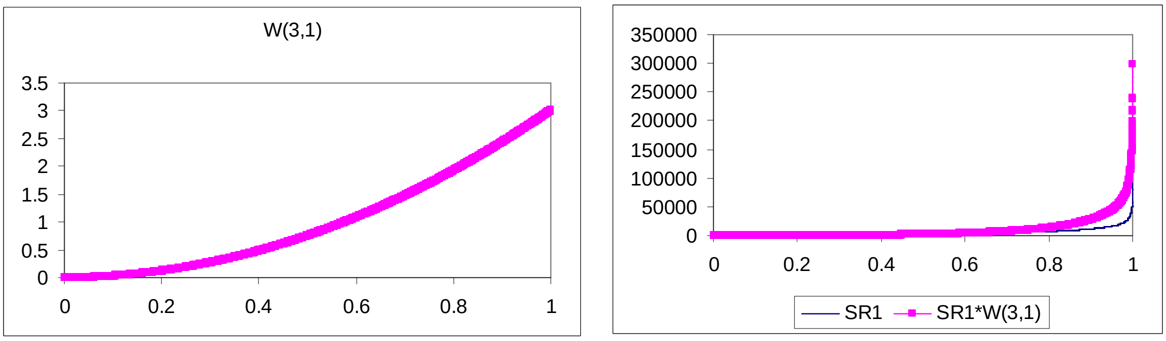
Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008

Figura 6. $\omega_{(1,3)}(\cdot)$, $P_{R,1}(\cdot)$ y $P_{R,1}(\cdot)\omega_{(1,3)}(\cdot)$, $P_{R,2}(\cdot)$ y $P_{R,2}(\cdot)\omega_{(1,3)}(\cdot)$.



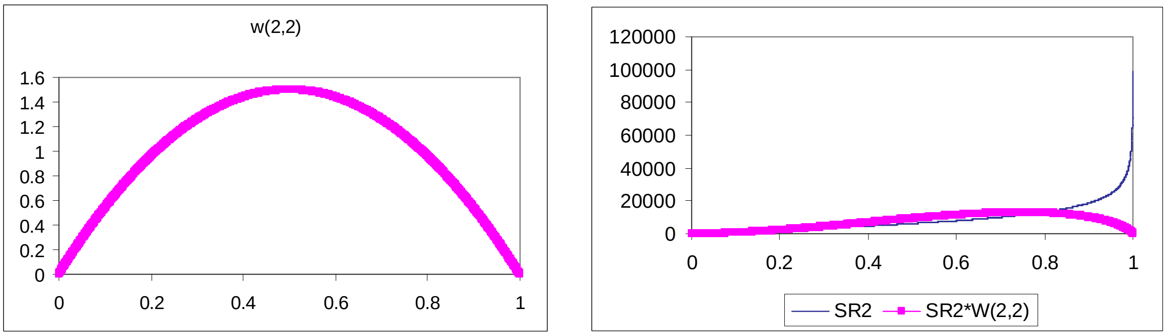
Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008

Figura 7. $\omega_{(3,1)}(\cdot)$, $S_{R,1}(\cdot)$ y $S_{R,1}(\cdot)\omega_{(3,1)}(\cdot)$.



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008

Figura 8. $\omega_{(2,2)}(\cdot)$, $S_{R,2}(\cdot)$ y $S_{R,2}(\cdot)\omega_{(2,2)}(\cdot)$.



Fuente: Encuesta de Condiciones de Vida 2008