

# **CAMBIOS EN PERSISTENCIA O ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL CON APLICACIÓN AL ANÁLISIS DEL EFECTO FISHER**

**Julio A. Afonso Rodríguez**

Departamento de Economía de las Instituciones, Estadística Económica y Econometría  
Instituto Universitario de Desarrollo Regional (IUDR)  
Universidad de La Laguna  
e-mail: jafonsor@ull.es

## **Resumen**

En este trabajo se estudia el comportamiento y características de un conjunto de contrastes de la hipótesis nula de estacionariedad estocástica,  $I(0)$ , frente a diferentes alternativas que representan distintos tipos y grados de persistencia, en presencia de errores de especificación consistentes en cambios estructurales sistemáticos y no sistemáticos. En particular, se estudia la potencia y distribución asintótica de los contrastes de  $I(0)$  frente a un cambio en persistencia de Kim (2000), Kim et.al. (2002) y Buseti y Taylor (2004) cuando el verdadero proceso generador de datos presenta un cambio estructural en el componente sistemático (tendencia polinomial). Para complementar estos resultados, se estudia también la potencia y distribución asintótica de un conjunto de contrastes de  $I(0)$  que consideran un cambio estructural en el componente sistemático (Buseti y Harvey (2001) y Afonso-Rodríguez (2010)), cuando la naturaleza del cambio estructural es de naturaleza no sistemática, en particular, un cambio en persistencia. Se encuentra que, bajo cada uno de estos errores de especificación, los correspondientes estadísticos de contraste presentan importantes distorsiones en el tamaño empírico y, por tanto, falta de robustez ante estos errores. Puesto que estos contrastes de la misma hipótesis nula plantean alternativas totalmente diferentes, estos resultados podrían cuestionar las conclusiones derivadas de su uso en la práctica. Para ilustrar este problema, se han aplicado dichos contrastes a las series trimestrales de tipos de interés real a largo plazo, tasa de inflación y tipo de interés ex-post de EEUU para un período largo (1953:Q2-2009:Q4), con resultados contradictorios, y se analizan las posibles implicaciones para el estudio del efecto Fisher.

**Palabras clave:** Estacionariedad estocástica, raíz unitaria, cambios en persistencia, cambio estructural, tipo de interés nominal, tasa de inflación, efecto Fisher.

**Clasificación JEL:** C12, C22, E31, E43, E44

**ÁREA TEMÁTICA:** *MÉTODOS CUANTITATIVOS EN ECONOMÍA  
MERCADOS MONETARIOS Y FINANCIEROS*

## 1. Introducción

El estudio del orden de integración de series temporales representa un amplio campo dentro del análisis econométrico de series temporales, tanto teórico como aplicado. Recientemente se ha planteado la posibilidad de que determinadas series puedan experimentar un cambio en persistencia moviéndose entre  $I(1)$  e  $I(0)$  o al contrario. Con la finalidad de examinar esta posibilidad se han propuesto múltiples procedimientos de contraste de la hipótesis de estacionariedad estocástica,  $I(0)$ , frente a un cambio en persistencia de  $I(0)$  a  $I(1)$  (o al contrario), o bien con dirección de cambio desconocida a priori, así como contrastes de la nula  $I(1)$  frente a las mismas posibilidades. En este trabajo nos vamos a centrar en el estudio del comportamiento de algunos de los contrastes del primer tipo en presencia de un cambio de naturaleza diferente para el que están diseñados, en particular, bajo cambio estructural en el componente determinista. Los contrastes considerados son los denominados contrastes basados en ratios debidos a Kim (2000), Kim et.al. (2002) y Buseti y Taylor (2004). Cook (2004) ha estudiado el comportamiento bajo la hipótesis nula  $I(1)$  del contraste de cambio en persistencia de Leybourne et.al. (2003) bajo cambio estructural, encontrando distorsiones en el tamaño empírico del contraste. En nuestro caso, puesto que la alternativa se representa como un proceso estacionario con cambio estructural, los resultados se referirán a la potencia empírica del contraste, encontrando efectos similares sobre esta característica de los contrastes. Adicionalmente vamos a estudiar el comportamiento y la potencia de los contrastes tipo KPSS de estacionariedad con cambio estructural propuestos por Buseti y Harvey (2001) frente a la alternativa de un cambio en persistencia. La omisión de un cambio estructural provoca que estos contrastes tiendan al sobrerrechazo de la hipótesis nula, de forma que en presencia de un potencial cambio de estructura del componente sistemático es preciso incorporar este fenómeno en el proceso de construcción de estos estadísticos. Con objeto de contar con una familia de contrastes con una estructura similar a la de estos y con mejores propiedades, en este trabajo se han modificado en el mismo sentido los estadísticos de contraste de estacionariedad V/S de Giraitis et.al. (2003, 2005) y KS de Xiao (2001) para la inclusión de cambios estructurales potenciales, se ha obtenido su distribución nula asintótica y se han calculado los percentiles críticos relevantes.

En las Secciones 2 y 3 se presentan los contrastes analizados de cambio en persistencia y de estacionariedad con cambio estructural, respectivamente, mientras que las Secciones 4 y 5 están dedicadas al estudio del comportamiento de cada uno de estos

contrastes bajo la alternativa de un cambio de naturaleza diferente para el que están diseñados, tal como se ha descrito anteriormente, encontrando que en ambos casos dichos contrastes tienen potencia frente a las alternativas planteadas, pudiendo hacer cuestionable en algunos casos las conclusiones que puedan derivarse de su utilización. En ambos casos se establecen las condiciones bajo las que ambos contrastes divergen bajo estacionariedad, así como su distribución asintótica bajo la correspondiente alternativa en presencia del error de especificación considerado. Finalmente la sección 6 presenta la aplicación de estos conjuntos de contrastes de estacionariedad a las series trimestrales de tipos de interés nominal a largo plazo y tasa de inflación para la economía americana, así como para su diferencial (tipo de interés real ex-post) como componentes de la ecuación de Fisher. Los resultados muestran contradicciones significativas en cuanto a la naturaleza de dichas series y se discuten sus posibles implicaciones en el contexto de la contrastación del efecto Fisher. La sección 7 contiene las principales conclusiones del trabajo.

## 2. Contrastes de cambio en persistencia en series temporales lineales

Para el contraste de la hipótesis de estacionariedad estocástica  $I(0)$ ,  $H_0$ , frente a las alternativas de cambio en persistencia de  $I(0)$  a  $I(1)$ ,  $H_{01}$ , de  $I(1)$  a  $I(0)$ ,  $H_{10}$ , o de cambio en persistencia con dirección de cambio desconocida,  $H_{01} \cup H_{10}$ , vamos a considerar la clase de estadísticos de contraste basados en ratios propuesta por Kim (2000), Kim et.al. (2002) y Buseti y Taylor (2004) a partir del siguiente modelo de componentes inobservados

$$y_t = d_t(p) + r_t + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t h_t(\tau_0) \quad (2.2)$$

donde  $h_t(\tau_0) = I(t > [n\tau_0])$ , con  $\tau_0 \in (0,1)$  e  $I(\cdot)$  la función indicador usual.

Alternativamente a (2.2) podría considerarse que el componente  $r_t$  viene dado por

$$r_t = r_{t-1} + u_t(1 - h_t(\tau_0)) = r_{t-1} + u_t I(t \leq [n\tau_0]) \quad (2.3)$$

donde, en cualquier caso,  $\varepsilon_t$  y  $u_t$  son mutuamente independientes, de media nula, con  $\sigma_u^2 = \text{Var}(u_t) \geq 0$ , y ambos verifican las condiciones de regularidad necesarias para ser de aplicación una versión apropiada del principio de invarianza (TCLF), de forma que  $n^{-1/2} \sum_{t=1}^{[nr]} (\varepsilon_t, u_t) \Rightarrow (\omega_\varepsilon W_0(r), \omega_u W_u(r))$ , donde  $\omega_\varepsilon^2$  y  $\omega_u^2$  son las varianzas a largo plazo, y  $W_0(r)$ ,  $W_u(r)$  son dos procesos de Wiener estándar (movimientos Brownianos) e

independientes, con  $r \in [0,1]$ . En relación con la varianza a largo plazo del proceso  $u_t$ ,  $\omega_u^2$ , se tiene que

$$\omega_u^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[ \left( \sum_{t=1}^n u_t \right)^2 \right] = \sigma_u^2 \left( 1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \sigma_u^{-2} \gamma_u(h) \right) = \sigma_u^2 \left( 1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \rho_u(h) \right) = \sigma_u^2 \tilde{\omega}_u^2 \quad (2.4)$$

El término  $d_t(p)$  representa el componente determinista, parametrizado como  $d_t(p) = \mathbf{z}'_{t,p} \boldsymbol{\gamma}_p$  y que generalmente viene dado por una tendencia polinomial de orden  $p$  dado,  $\mathbf{z}'_{t,p} = \mathbf{x}'_{t,p} = (1, t, \dots, t^p)$ , con  $\boldsymbol{\gamma}_p = \boldsymbol{\beta}_p$ , pero que puede extenderse al caso de inclusión de cambios estructurales en los componentes de la tendencia de la forma  $\mathbf{z}'_{t,p} = (1 + \phi_0 h_t(\lambda_0), t[1 + \phi_1 h_t(\lambda_1)], \dots, t^p [1 + \phi_p h_t(\lambda_p)])$ , con  $d_t(p) = \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\gamma}_p + \mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}) \boldsymbol{\delta}_p$ ,  $\delta_i = \gamma_i \phi_i$  y  $\mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}) = (h_t(\lambda_0), t h_t(\lambda_1), \dots, t^p h_t(\lambda_p))$ ,  $h_t(\lambda_i) = I(t > [n \cdot \lambda_i])$  y  $\lambda_i \in (0,1)$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ . Respecto de este componente se impone como condición de regularidad la existencia de una matriz de normalización, cuadrada y no singular,  $\mathbf{D}_p$ , tal que  $\mathbf{D}_p \cdot \mathbf{x}_{[nr],p} = \tilde{\mathbf{x}}_{[nr],p} \rightarrow \mathbf{x}_p(r)$  uniformemente sobre  $r \in [0,1]$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $\mathbf{x}_p(r)$  es una función continuamente diferenciable en  $[0,1]$ . En el caso de una tendencia polinomial de orden  $p$ , la esta matriz tomaría la forma  $\mathbf{D}_p = \text{diag}(1, n^{-1}, \dots, n^{-p})$ , con  $\mathbf{x}_p(r) = (1, r, \dots, r^p)$ . Por otro lado, haciendo  $\tau_0 = 0$  en (2.2), o bien  $\tau_0 = 1$  en (2.3), (2.1) se reduce a la alternativa de persistencia constante, I(1), empleado por Kwiatkowski et.al. (1992) para el contraste de estacionariedad estocástica I(0). En cualquier otro caso,  $\tau_0 \in (0,1)$ , la ecuación (2.2) representa el cambio en persistencia de I(0) a I(1) en el punto  $[n\tau_0]+1$ , mientras que (2.3) representa el cambio en persistencia de I(1) a I(0) en el punto  $[n\tau_0]$ , siempre que  $\sigma_u^2 > 0$ . Por tanto, las hipótesis alternativas  $H_{01}$  y  $H_{10}$  se corresponden con el contraste de  $\sigma_u^2 = 0$  en los modelos (2.2) y (2.3), respectivamente. Alternativamente a (2.1)-(2.3), se puede considerar una representación más general de la forma  $y_t = d_t(p) + \eta_{k,t}(\tau_0)$ , donde el término de error viene dado por

$$\eta_{k,t}(\tau_0) = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^t G_{k,i}(\tau_0) u_i, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

donde la función  $G_{k,t}(\tau_0)$  determina el grado y tipo de persistencia y viene dada por

$$G_{k,t}(\tau_0) = \begin{cases} 0 & k = 0 \text{ (I(0) constante)} \\ h_t(\tau_0) & k = 1 \text{ (cambio en persistencia de I(0) a I(1))} \\ 1 - h_t(\tau_0) & k = 2 \text{ (cambio en persistencia de I(1) a I(0))} \\ 1 & k = 3 \text{ (I(1) constante)} \end{cases} \quad (2.6)$$

Así,  $k = 0$  es equivalente a la hipótesis nula de estacionariedad estricta ( $\sigma_u^2 = 0$ ), mientras que  $k = 3$  es equivalente a la alternativa de raíz unitaria permanente en toda la

muestra. Para cada modalidad y grado de persistencia considerado como alternativa a la estacionariedad estricta, se puede considerar una secuencia de alternativas locales con  $\sigma_u^2 = (c/n)^2$ , con  $c \geq 0$  en (2.4), de forma que puede escribirse  $u_t = \omega_u z_t$ , con  $\omega_u = \sigma_u \tilde{\omega}_u = c\tilde{\omega}_u / n$  y, por tanto, en (2.5), para  $r \in [0, \tau]$ , con  $\tau \in (0,1)$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \eta_{k,t}(\tau_0) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \varepsilon_t + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \sum_{i=1}^t G_{k,i}(\tau_0) u_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \varepsilon_t + c\tilde{\omega}_u \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^t G_{k,i}(\tau_0) z_i \\ &\Rightarrow \omega_\varepsilon W_0(r) + c\tilde{\omega}_u V_k(r, \tau_0) = \omega_\varepsilon \left\{ W_0(r) + \frac{c\tilde{\omega}_u}{\omega_\varepsilon} V_k(r, \tau_0) \right\} = \omega_\varepsilon V_{k,c}(r, \tau_0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

mientras que para  $r \in (\tau, 1]$  se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=[n\tau]+1}^{[nr]} \eta_{k,t}(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \sum_{t=1}^{[nr]} \eta_{k,t}(\tau_0) - \sum_{t=1}^{[n\tau]} \eta_{k,t}(\tau_0) \right\} \Rightarrow \omega_\varepsilon [V_{k,c}(r, \tau_0) - V_{k,c}(\tau, \tau_0)] \quad (2.8)$$

con

$$V_1(r, \tau_0) = \int_{\tau_0}^r [W_u(s) - W_u(\tau_0)] ds \cdot I(r > \tau_0) \quad (2.9-1)$$

$$V_2(r, \tau_0) = \int_0^{\min(r, \tau_0)} W_u(s) ds + (r - \tau_0) W_u(\tau_0) I(r > \tau_0) \quad (2.9-2)$$

$$V_3(r, \tau_0) = \int_0^r W_u(s) ds \quad (2.9-3)$$

en (2.7), para  $k = 1$  (cambio en persistencia de I(0) a I(1)),  $k = 2$  (cambio en persistencia de I(1) a I(0)), y  $k = 3$  (raíz unitaria, I(1), constante en toda la muestra). Con esta notación y resultados, la hipótesis nula de estacionariedad,  $k = 0$ , se corresponde también con  $c = 0$  en (2.7)-(2.8), de forma que  $V_{0,c}(r, \tau_0) = V_0(r, \tau_0) = W_0(r)$ . Para el contraste de estas hipótesis, Kim (2000), Kim et.al. (2002) y Buseti y Taylor (2004), han desarrollado una serie de contrastes basados en el estadístico ratio

$$\hat{K}_{n,p}(\tau) = \frac{\frac{1}{(n-[n\tau])^2} \sum_{t=[n\tau]+1}^n \hat{S}_{2,t}^2(p)}{\frac{1}{[n\tau]^2} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \hat{S}_{1,t}^2(p)} = \frac{\frac{n^2}{(n-[n\tau])^2} \sum_{t=[n\tau]+1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[n\tau]+1}^t \hat{\eta}_{2,i}(p) \right)^2}{\frac{n^2}{[n\tau]^2} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^t \hat{\eta}_{1,i}(p) \right)^2} = \frac{\hat{A}_{n,p}(\tau)}{\hat{B}_{n,p}(\tau)} \quad (2.10)$$

donde  $\hat{\eta}_{j,t}(p)$ ,  $j = 1, 2$ , son los residuos MCO del ajuste del modelo (2.1) bajo la hipótesis nula  $\sigma_u^2 = 0$  en dos submuestras separadas para las primeras  $[n\tau]$  ( $j=1$ ) y las últimas  $n-[n\tau]$  ( $j=2$ ) observaciones respectivamente. El estadístico (2.10) es aproximadamente, salvo por la omisión del estimador de la varianza a largo plazo basado en los correspondientes residuos MCO, el ratio de dos estadísticos tipo KPSS calculados en cada submuestra. Buseti y Taylor (2004) obtienen la distribución asintótica de (2.10) teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{j, [nr]}(p) \Rightarrow \omega_\varepsilon V_{k,p}^{(j)}(r, \tau_0) \quad j=1,2 \quad (2.11)$$

para cada  $k = 0, 1, 2$  y  $3$ , con

$$V_{k,p}^{(1)}(r, \tau_0) = V_{k,c}(r, \tau_0) - \int_0^r \mathbf{x}'_p(s) ds \left( \int_0^\tau \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\tau \mathbf{x}_p(s) dV_{k,c}(s, \tau_0) \quad (2.12)$$

y

$$V_{k,p}^{(2)}(r, \tau_0) = V_{k,c}(r, \tau_0) - V_{k,c}(\tau, \tau_0) - \int_\tau^r \mathbf{x}'_p(s) ds \left( \int_\tau^1 \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_\tau^1 \mathbf{x}_p(s) dV_{k,c}(s, \tau_0) \quad (2.13)$$

con  $V_{k,c}(r, \tau_0)$  como en (2.7). Así, para  $k = 0$ , se puede implementar un contraste condicional para un punto de cambio potencial  $\tau$  dado. Sin embargo, resulta más apropiado resumir la información muestral para un rango de valores suficientemente amplio de  $\tau$  que considerar un único valor particular. Así, Kim (2000), Kim et.al. (2002) y Buseti y Taylor (2004) consideran contrastes basados en la secuencia de estadísticos  $\{\hat{K}_{n,p}(\tau), \tau \in \Lambda\}$ , donde  $\Lambda = [\tau_l, \tau_u]$  es un subconjunto compacto de  $[0, 1]$ , con  $\tau_l \leq \tau_0 \leq \tau_u$  y  $[n\tau_l], n - [\tau_u] \geq p$ . Los estadísticos propuestos se basan en la tasa de divergencia de los componentes del numerador y denominador de (2.10) bajo cada una de las alternativas propuestas y son los siguientes:

| <b><math>H_{01}</math>: Contraste I(0) frente a cambio I(0) a I(1)</b>   | <b><math>H_{10}</math>: Contraste I(0) frente a cambio I(1) a I(0)</b>   |
|--|--|
| $H_j(\hat{K}_{n,p}(\tau)) = \hat{H}_{j,p}(\hat{\tau}_n) \quad j=1,2,3$   | $H'_j(\hat{K}_{n,p}(\tau)) = \hat{H}'_{j,p}(\hat{\tau}_n) \quad j=1,2,3$   |
| $\hat{H}_{1,p}(\hat{\tau}_n) = \max_{s=[\tau_l n], \dots, [\tau_u n]} \hat{K}_{n,p}(\frac{s}{n})$  | $\hat{H}'_{1,p}(\hat{\tau}_n) = \max_{s=[\tau_l n], \dots, [\tau_u n]} \hat{K}_{n,p}^{-1}(\frac{s}{n})$  |
| $\hat{H}_{2,p}(\hat{\tau}_n) = \frac{1}{[\tau_u n] - [\tau_l n] + 1} \sum_{s=[\tau_l n]}^{[\tau_u n]} \hat{K}_{n,p}(\frac{s}{n})$                            | $\hat{H}'_{2,p}(\hat{\tau}_n) = \frac{1}{[\tau_u n] - [\tau_l n] + 1} \sum_{s=[\tau_l n]}^{[\tau_u n]} \hat{K}_{n,p}^{-1}(\frac{s}{n})$                            |
| $\hat{H}_{3,p}(\hat{\tau}_n) = \ln \left\{ \frac{1}{[\tau_u n] - [\tau_l n] + 1} \sum_{s=[\tau_l n]}^{[\tau_u n]} \exp[\hat{K}_{n,p}(\frac{s}{n})] \right\}$ | $\hat{H}'_{3,p}(\hat{\tau}_n) = \ln \left\{ \frac{1}{[\tau_u n] - [\tau_l n] + 1} \sum_{s=[\tau_l n]}^{[\tau_u n]} \exp[\hat{K}_{n,p}^{-1}(\frac{s}{n})] \right\}$ |

Para el contraste de la hipótesis nula I(0) frente a la alternativa de un cambio en persistencia de dirección desconocida, Buseti y Taylor (2004) proponen emplear los siguientes

$$\hat{H}_{3+i,p}(\hat{\tau}_n) = \max(\hat{H}_{i,p}(\hat{\tau}_n), \hat{H}'_{i,p}(\hat{\tau}_n)), \quad i = 1, 2, 3$$

En cualquiera de los casos indicados, dada la distribución asintótica nula de estos nueve estadísticos derivada de la de (2.10) por aplicación del Teorema del Mapeado Continuo, se detectará un rechazo de la hipótesis nula para un valor grande de los mismos. En Kim (2000), Buseti y Taylor (2004) y Taylor (2005) pueden encontrarse tabulados los percentiles críticos de estos estadísticos para  $p = 0$  (corrección por la media) y  $p = 1$  (corrección por la media y una tendencia lineal) para distintos tamaños muestrales. A partir del Teorema 2.2 de Buseti y Taylor (2004) se prueba la consistencia de los contrastes basados en  $H_j(\hat{K}_{n,p}(\tau))$  y  $H'_j(\hat{K}_{n,p}(\tau))$  bajo las alternativas de cambio en

persistencia de I(0) a I(1) y de I(1) a I(0), respectivamente, lo que implica que en el caso de la alternativa de raíz unitaria constante, ambos conjuntos de estadísticos son  $O_p(1)$ , de forma que los contrastes basados en el estadístico ratio (2.10) son inconsistentes frente a procesos con persistencia constante. Como producto final de este análisis, Kim (2000) propone un estimador  $n$ -consistente del punto de cambio,  $\hat{\tau}_n$ , basado en el estadístico

$$\hat{\Lambda}_{n,p}(\tau) = \frac{\frac{1}{(n-[n\tau])^2} \sum_{t=[n\tau]+1}^n \hat{\eta}_{2,t}^2(p)}{\frac{1}{[n\tau]} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \hat{\eta}_{1,t}^2(p)} \quad (2.14)$$

definido como  $\hat{\tau}_n = \arg \max_{\tau \in \Lambda} \hat{\Lambda}_{n,p}(\tau)$  bajo la alternativa  $H_{01}$ , y  $\hat{\tau}_n = \arg \min_{\tau \in \Lambda} \hat{\Lambda}_{n,p}(\tau)$  bajo  $H_{10}$ . Buseti y Taylor (2004) y Leybourne, Taylor y Kim (2006) han considerado también la estimación del punto de cambio en persistencia pero empleando una versión escalada de (2.14) de la forma  $\tilde{\Lambda}_{n,p}(\tau) = [n\tau] \hat{\Lambda}_{n,p}(\tau)$ .

### 3. Contrastes de estacionariedad con cambio estructural permanente completo

En este caso, el PGD viene dado por

$$y_t = \mathbf{x}'_{t,p} \cdot \boldsymbol{\beta}_p + \mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\delta}_p + r_t + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t \quad (3.2)$$

donde los términos  $(\mathbf{x}'_{t,p}, \mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}))$  del componente determinista se han descrito en la sección anterior, con  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)'$  de forma que es posible considerar, a priori, un punto de cambio diferente para componente de la tendencia polinomial, o bien haciendo algún  $\lambda_i = 1$  el término correspondiente no se vería afectado por el cambio estructural. Haciendo  $\lambda_i = \lambda$  para todo  $i = 0, 1, \dots, p$ , entonces  $\mathbf{h}'_{t,p}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda)$ . Haciendo  $\boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{0}_{p+1}$  en (3.1) se tiene el modelo de nivel-local generalizado en el que se basan los estadísticos KPSS de Kwiatkowski et.al. (1992) para el contraste I(0) frente a I(1). Lee et.al. (1997) demuestran que en los casos  $p = 0$  y  $p = 1$ , estos estadísticos KPSS divergen a una tasa  $O(n/q_n)$  bajo la hipótesis nula I(0) cuando se omite un cambio estructural, donde  $q_n = o(n)$  es el parámetro bandwidth empleado en la estimación de la varianza a largo plazo basado en los residuos MCO de esta regresión, lo que provoca un sobrerchazo de la hipótesis nula a favor de la alternativa I(1) por omisión del cambio estructural, mientras que bajo la alternativa el componente de paseo aleatorio domina el error de especificación y en este caso las distribuciones asintóticas no se ven afectadas por el error de especificación. Buseti y Harvey (2001) deriva un contraste tipo KPSS

condicional a la elección de un punto de cambio a priori de la forma

$$\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda) = \frac{1}{n \hat{\omega}_n^2(q_n, \lambda)} \sum_{t=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda) \right)^2 \quad (3.3)$$

donde  $n^{-1/2} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{j,p}(\lambda)$ ,  $\hat{\omega}_n^2(q_n, \lambda)$  es un estimador consistente de la varianza a largo plazo basado en los residuos MCO<sup>1</sup>, con  $\hat{\eta}_{j,p}(\lambda)$  los residuos del ajuste MCO de la regresión auxiliar del contraste dada por el modelo (3.1) bajo la hipótesis nula, es decir,

$$\hat{\eta}_{t,p}(\lambda) = \eta_t - \mathbf{x}'_{t,p} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) - \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda) (\hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\delta}_p) \quad (3.4)$$

donde, de forma general,  $\eta_t = r_t + \varepsilon_t$ , y

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\delta}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_n(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \\ \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n(p) \\ \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

con

$$\mathbf{Q}_{[nr]}(p) = \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p}, \quad \mathbf{U}_{n-[nr]}(p) = \sum_{j=[nr]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} = \mathbf{Q}_n(p) - \mathbf{Q}_{[nr]}(p) \quad (3.6)$$

y

$$\mathbf{H}_{[nr]}(p) = \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}_{j,p} \eta_j, \quad \mathbf{J}_{n-[nr]}(p) = \sum_{j=[nr]+1}^n \mathbf{x}_{j,p} \eta_j = \mathbf{H}_n(p) - \mathbf{H}_{[nr]}(p) \quad (3.7)$$

Utilizando la estructura de la inversa de la matriz en (3.5) particionada en bloques, se tiene

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p = \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p), \quad (3.8)$$

y

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda) - \boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p) - \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p) \quad (3.9)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{j,p}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_j - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda) (\mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p) - \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde  $n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda) = 0$  si  $r < \lambda$ , y para todo  $\lambda \leq r \leq 1$ , se tiene que

$$n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda) = n^{-1/2} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} = n^{-1/2} \left( \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{t,p} - \sum_{j=1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}'_{t,p} \right).$$

Entonces, bajo la hipótesis nula de estacionariedad, con  $\eta_t = \varepsilon_t$ , se tiene que

<sup>1</sup> Para un tratamiento completo de la estimación consistente a heterocedasticidad y autocorrelación de la varianza a largo plazo (LRV-HAC) pueden consultarse los trabajos de den Haan y Levin (1997,2000) y sobre su utilización en la construcción de estadísticos de contraste de la hipótesis de estacionariedad, Carrion-i-Silvestre y Sansó (2006).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda) &\Rightarrow \omega_\varepsilon \left\{ W_0(r) - \int_0^r \mathbf{x}'_p(s) ds \left( \int_0^\lambda \mathbf{x}'_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) dW_0(s) \right\} \\
&\quad - \omega_\varepsilon I(r > \lambda) \int_\lambda^r \mathbf{x}'_p(s) ds \\
&\quad \times \left\{ \left( \int_\lambda^1 \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_\lambda^1 \mathbf{x}_p(s) dW_0(s) - \left( \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) dW_0(s) \right\} \\
&= \omega_\varepsilon V_p(r, \lambda) - \omega_\varepsilon I(r > \lambda) U_p(r, \lambda) = \omega_\varepsilon B_p(r, \lambda)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

donde  $B_p(r, \lambda) = V_p(r, \lambda) - I(r > \lambda) U_p(r, \lambda)$ . Busetti y Harvey (2001, 2003) y Harvey y Mills (2003), proporcionan expresiones explícitas para estos términos en los casos  $p = 0$  y  $p = 1$ , para un conjunto de modelos particulares con cambio estructural en el nivel, en la tendencia y en el nivel y en la tendencia lineal, además del cálculo de los valores críticos apropiados. Así, dada la consistencia del estimador de la varianza a largo plazo,  $\hat{\omega}_n^2(q_n, \lambda) \xrightarrow{p} \omega_\varepsilon^2$  y el resultado en (3.11), la distribución asintótica nula y en muestras finitas del estadístico (3.3) depende de  $\lambda$ , con  $\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda) \Rightarrow \int_0^1 B_p(s, \lambda)^2 ds$ , de forma que para un cierto valor dado (supuesto conocido) del punto de cambio estructural  $\lambda$  puede llevarse a cabo el contraste de estacionariedad empleando el estadístico KPSS de la forma habitual (contraste condicional). Sin embargo, habitualmente, el punto de cambio será desconocido de forma que Busetti y Harvey (2001) proponen en este caso llevar a cabo un contraste incondicional, dado por el resultado más favorable para la hipótesis nula de estacionariedad estocástica utilizando una secuencia de estadísticos (3.3) de la forma

$$\tilde{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \hat{\lambda}_n) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda) \tag{3.12}$$

con  $\hat{\lambda}_n = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda)$  el estimador del punto de cambio, y  $\Lambda$  un subconjunto cerrado del intervalo  $(0,1)$ , y cuya distribución dependerá tanto de la localización del verdadero punto de cambio,  $\lambda_0$ , como de la magnitud de los parámetros de salto,  $\boldsymbol{\delta}_p$ , puesto que en este caso se tiene, en lugar de (3.8) y (3.9), que

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda, \lambda_0) - \boldsymbol{\beta}_p = \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \left\{ \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p) + \sum_{t=1}^{[n\lambda]} \mathbf{x}_{t,p} \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda_0) \boldsymbol{\delta}_p \right\}$$

y

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda, \lambda_0) - \boldsymbol{\delta}_p = -(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda, \lambda_0) - \boldsymbol{\beta}_p) + \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \left\{ \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p) - \sum_{t=1}^{[n\lambda_0]} \mathbf{x}_{t,p} \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda) \boldsymbol{\delta}_p \right\}$$

Con el objeto de poder emplear la misma distribución asintótica nula que en el caso del contraste condicional, Busetti y Harvey (2001) consideran el supuesto de que la magnitud de los coeficientes de salto,  $\delta_i$   $i = 0, 1, \dots, p$ , tiende a cero a una tasa más

rápida que  $n^{i+1/2}$ , es decir,  $\delta_i = O(n^{-(i+1/2+\alpha)})$  para algún  $\alpha \in (0,1/2)$ . De esta forma, por aplicación del Teorema del Mapeado Continuo, la distribución asintótica nula del estadístico (3.12) viene dada por  $\hat{M}_{n,p}^{(1)}(q_n, \lambda) \Rightarrow \inf_{\lambda \in \Lambda} \int_0^1 B_p(s, \lambda)^2 ds$ . Alternativamente a este procedimiento, Buseti y Harvey (2003) proponen un procedimiento en dos etapas empleando inicialmente un estimador superconsistente de  $\lambda$ , por ejemplo siguiendo a Bai (1994, 1997),  $\tilde{\lambda}_n = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{t=1}^n \hat{\eta}_{t,p}^2(\lambda)$  y, en una segunda etapa, llevar a cabo el contraste de estacionariedad empleando (3.3) y la distribución asintótica nula anterior, con  $\lambda = \tilde{\lambda}_n$  como si fuese el verdadero punto de ruptura.<sup>2</sup> Además del contraste no-paramétrico KPSS, con la adaptación descrita al caso de corrección por un posible cambio estructural, se han propuesto recientemente otros contrastes alternativos, similares en construcción, que presentan mejores propiedades en muestras finitas, tal como un mejor balance entre tamaño y potencia empírica. A continuación se presenta la adaptación de dos de estos estadísticos para el contraste de la hipótesis nula de estacionariedad en torno a un componente determinista con un posible cambio estructural, así como su distribución asintótica nula. Se trata del estadístico basado en el ratio V/S de Giraitis et.al. (2003, 2005)

$$\hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda) = \frac{1}{n \cdot \hat{\omega}_n^2(q_n, \lambda)} \left\{ \sum_{t=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda) \right)^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda) \right)^2 \right\} \quad (3.13)$$

y el estadístico KS de Xiao (2001), dado por

$$\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda) = \hat{\omega}_n^{-1}(q_n, \lambda) \max_{t=1, \dots, n} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda) - \frac{t}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{n,p}(\lambda) \right) \right| \quad (3.14)$$

El estadístico de varianza reescalada basado en el estadístico V/S, ecuación (3.13), puede interpretarse como una corrección del estadístico KPSS por el nivel promedio del proceso de suma parcial de residuos MCO, mientras que el estadístico KS de Xiao (2001), ecuación (3.14), propone identificar una excesiva fluctuación en la serie temporal que indique evidencia de no estacionariedad empleando la métrica de Kolmogorov-Smirnov. En (3.13) se tiene que el estadístico V/S se reduce al de KPSS cuando  $p = 1$ , puesto que en este caso se tiene que  $\sum_{t=1}^n n^{-1/2} \hat{S}_{t,1}(\lambda) = 0$ , mientras que en (3.14), el estadístico KS se reduce a  $\hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda) = \hat{\omega}_n^{-1}(q_n, \lambda) \cdot \max_{t=1, \dots, n} |n^{-1/2} \hat{S}_{t,p}(\lambda)|$  siempre que la regresión auxiliar del contraste contenga un término constante, puesto que en este

<sup>2</sup> Dada la superconsistencia del estimador del punto de ruptura, la distribución asintótica nula del estadístico de contraste condicional empleando la estimación de  $\lambda$  como un valor dado, es la misma que si se utilizase el verdadero valor de dicho parámetro, pudiendo utilizar los valores críticos originales.

caso  $\hat{S}_{n,p}(\lambda) = 0$ . La siguiente proposición establece la distribución asintótica nula de estos dos estadísticos en el caso del contraste de estacionariedad con cambio estructural condicional a un punto de cambio dado.

**Proposición 3.1.** *En el modelo con cambio estructural y los supuestos relativos al término de error y el componente determinista, se tiene que los contrastes V/S y KS condicionales, fijado un punto de cambio  $\lambda \in (0,1)$ , tienen distribución asintótica nula dada por:*

$$(i) \hat{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \lambda) \Rightarrow \int_0^1 B_p(s, \lambda)^2 ds - \left( \int_0^1 B_p(s, \lambda) ds \right)^2, \quad (ii) \hat{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \lambda) \Rightarrow \sup_{0 \leq s \leq 1} |B_p(s, \lambda) - sB_p(1, \lambda)|.$$

**Prueba.** La prueba se sigue directamente de la distribución asintótica nula del contraste KPSS con cambio estructural y del Teorema del Mapeado Continuo. En el caso donde la regresión auxiliar del contraste contenga un término constante, se tiene que en (ii),  $B_p(1, \lambda) = 0$ .

Por analogía con el procedimiento basado en el estadístico KPSS anterior, pueden también definirse versiones incondicionales basadas en los estadísticos V/S y KS de la forma  $\tilde{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \hat{\lambda}_n) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \hat{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$ . La siguiente proposición establece la distribución asintótica nula de los mismos.

**Proposición 3.2.** *En el modelo con cambio estructural y los supuestos anteriores relativos al término de error, el componente determinista y la magnitud de los coeficientes de salto ( $\delta_i = O(n^{-(i+1/2+\alpha)})$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ ,  $\alpha \in (0, 1/2)$ ), se tiene que los contrastes V/S y KS incondicionales, con  $\lambda \in \Lambda \subset (0,1)$ , tienen distribución asintótica nula dada por:*

$$(i) \tilde{M}_{n,p}^{(2)}(q_n, \hat{\lambda}_n) \Rightarrow \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \int_0^1 B_p(s, \lambda)^2 ds - \left( \int_0^1 B_p(s, \lambda) ds \right)^2 \right\},$$

$$(ii) \tilde{M}_{n,p}^{(3)}(q_n, \hat{\lambda}_n) \Rightarrow \inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq 1} |B_p(s, \lambda) - sB_p(1, \lambda)| \right\}.$$

**Prueba.** La prueba se sigue de la correspondiente distribución asintótica nula anterior, el supuesto de magnitud de los coeficientes de salto como en Buseti y Harvey (2001) y por aplicación del Teorema del Mapeado Continuo.

Finalmente, también es posible utilizar los estadísticos (3.13) y (3.14) en la versión en dos etapas del procedimiento de contraste tal como se ha descrito para el estadístico KPSS, conservando las distribuciones dadas en la proposición 3.1.

#### 4. Comportamiento de los contrastes de cambio en persistencia bajo estacionariedad con cambio estructural.

Buseti y Taylor (2004) consideran el caso de la inclusión de un cambio estructural en el

componente determinista en la regresión auxiliar de los contrastes de cambio en persistencia con localizaciones  $\lambda_0$  y  $\tau_0$ , respectivamente. Cuando  $\lambda_0 = \tau_0$  el estadístico-ratio es exactamente el mismo que en el caso  $\lambda_0 = 0$  e invariante a la magnitud de los coeficientes de salto. Estos autores apuntan que la omisión de un cambio estructural sistemático induce un rechazo espúreo de la hipótesis nula de estacionariedad, incluso asintóticamente, y que las distorsiones dependen del punto de cambio, la magnitud de los saltos y la dirección del cambio. En esta sección estudiamos analíticamente y en detalle estas distorsiones y bajo qué distintas condiciones sobre estos elementos se producen tales distorsiones.

En lo que sigue se plantea la situación donde para el contraste de la hipótesis nula de estacionariedad frente a alguna de las alternativas de cambio en persistencia utilizando las correspondientes funcionales del estadístico-ratio (2.10) descritas en la sección 2, pero donde el verdadero PGD viene dado por un modelo con cambio estructural en el componente determinista, del tipo general descrito en la sección 3 (ecuaciones (3.1),(3.2)). Así se tiene la secuencia de estadísticos ratio

$$\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = \frac{\hat{A}_{n,p}(\tau, \lambda)}{\hat{B}_{n,p}(\tau, \lambda)} = \frac{\frac{1}{(n-[n\tau])^2} \sum_{t=[n\tau]+1}^n \hat{S}_{2,t}^2(p, \lambda)}{\frac{1}{[n\tau]^2} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \hat{S}_{1,t}^2(p, \lambda)} \quad (4.1)$$

con  $\hat{S}_{1,t}(p, \lambda) = \sum_{i=1}^t \hat{\eta}_{1,i}(p, \lambda)$  y  $\hat{S}_{2,t}(p, \lambda) = \sum_{i=[n\tau]+1}^t \hat{\eta}_{2,i}(p, \lambda)$  los procesos de sumas parciales de residuos MCO, para  $\tau \in [\tau_l, \tau_u] \subset (0,1)$ , donde  $\hat{\eta}_{1,t}(p, \lambda) = y_t - \mathbf{x}'_{t,p} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,[n\tau]}(\lambda)$ , para  $t=1, \dots, [n\tau]$  y  $\hat{\eta}_{2,t}(p, \lambda) = y_t - \mathbf{x}'_{t,p} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n-[n\tau]}(\lambda)$  para  $t=[n\tau]+1, \dots, n$  los residuos MCO del ajuste del modelo en cada una de las dos submuestras. La omisión del cambio estructural en el componente sistemático implica que los componentes del estadístico, así como su comportamiento y distribución asintótica, dependen básicamente de la localización del cambio estructural en la muestra y de la magnitud de los parámetros de salto,  $\boldsymbol{\delta}_p$ . Por tanto, para obtener los siguientes resultados relativos al comportamiento divergente del estadístico  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$  en (4.1) y su distribución asintótica bajo la hipótesis nula es necesario introducir el siguiente supuesto relativo a las magnitudes de dichos parámetros de salto.

#### **SUPUESTO A. Magnitud de los coeficientes de salto**

- A.1** La magnitud de los coeficientes de salto,  $\delta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , es finita e independiente del tamaño muestral, es decir,  $\delta_i = O(1)$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ .
- A.2** La magnitud de los coeficientes de salto,  $\delta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , tiende a cero con el

tamaño muestral a una tasa  $n^{i+1/2}$ , es decir,  $\delta_i = \frac{c_i}{n^{i+1/2}}$ , con  $c_i = O(1)$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ .

El siguiente Teorema 4.1 establece el comportamiento de (4.1) cuando el verdadero PGD viene dado por

$$y_t = \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\beta}_p + \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \boldsymbol{\delta}_p + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

con  $\varepsilon_t$  una secuencia de errores estacionaria. Es decir, se considera el caso donde el proceso observado sea estacionario en torno a un componente determinista con cambio estructural.

**Teorema 4.1.** *Dado el modelo (4.2), con términos de error  $\varepsilon_t$  estacionarios, que verifican condiciones suficientes para ser de aplicación algún principio de invarianza, entonces para un valor dado  $\tau \in [\tau_l, \tau_u] \in (0,1)$ , un punto de cambio estructural  $\lambda \in (0,1)$  y el supuesto (A.1) sobre la magnitud de los coeficientes de salto, se tiene que:*

- (i) Si  $\tau < \lambda$ , entonces  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = O_p(n^{2p+1})$ ,
- (ii) Si  $\tau = \lambda$ , entonces  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = \hat{K}_{n,p}(\tau)$ , y
- (iii) Si  $\tau > \lambda$ , entonces  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = O_p(n^{-(2p+1)})$ .

**Prueba.** Ver Apéndice A.<sup>3</sup>

**Observación 4.1.** Bajo la alternativa de cambio en persistencia en alguna de las dos direcciones posibles, o bien bajo raíz unitaria constante, se obtiene un resultado similar al anterior aunque la divergencia es una tasa inferior, específicamente  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = O_p(n^{2p-1})$  y  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = O_p(n^{-(2p-1)})$  en (i) y (iii), respectivamente. Esto resulta de la normalización por el factor  $n^{-3/2}$  en los procesos de sumas parciales de ambos conjuntos de residuos y del hecho de que bajo el supuesto (A.1) anterior, ahora se tiene que éstos dependen de la magnitud de los coeficientes de salto de la forma  $\bar{\boldsymbol{\delta}}_{p,n} = (1/n) \boldsymbol{\delta}_{p,n} = n^{-1/2} \cdot \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\delta}_p$ , con componente  $i$ -ésimo  $\bar{\delta}_{i,n} = n^{i-1/2} \delta_i$ . Así,  $n^{-3/2} \hat{S}_{1,[nr]}(p, \lambda) = O_p(1) + O(n^{(2p-1)/2}) I(\tau > \lambda)$  y  $n^{-3/2} \hat{S}_{2,[nr]}(p, \lambda) = O_p(1) + O(n^{(2p-1)/2}) I(\tau < \lambda)$ . En el caso  $p = 0$ , regresión sólo con término constante, bajo el supuesto (A.1) se tiene que  $n^{-3/2} \hat{S}_{j,[nr]}(p, \lambda) = O_p(1) + O(n^{-1/2})$ ,  $j = 1, 2$ , de forma que domina el límite del componente no estacionario y la omisión del cambio estructural no tiene efecto asintóticamente sobre el comportamiento del estadístico-ratio. El resumen de los resultados relativos al comportamiento de los estadísticos del numerador y denominador del estadístico ratio dependiendo de la relación entre los parámetros de localización de los cambios en persistencia y de cambio estructural ( $\tau, \lambda$ ) se recoge en el siguiente cuadro.

<sup>3</sup> En Afonso-Rodríguez (2010) se incluyen los resultados numéricos de un estudio de simulación donde se cuantifica la distorsión en el tamaño de estos contrastes debido a la omisión del cambio estructural.

**Comportamiento del estadístico ratio para el contraste de cambio en persistencia con punto de cambio fijo,  $\tau$  con omisión de cambio estructural:**

$$\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = \hat{B}_{n,p}^{-1}(\tau, \lambda) \cdot \hat{A}_{n,p}(\tau, \lambda)$$

|                                | (a) $\tau > \lambda$  | (b) $\tau < \lambda$  |
|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\hat{A}_{n,p}(\tau, \lambda)$ | $\hat{A}_{n,p}(\tau)$ | $O_p(n^{2p+1})$       |
| $\hat{B}_{n,p}(\tau, \lambda)$ | $O_p(n^{2p+1})$       | $\hat{B}_{n,p}(\tau)$ |
| $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$ | $O_p(n^{-(2p+1)})$    | $O_p(n^{2p+1})$       |

El estadístico-ratio  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$  diverge bajo la hipótesis nula  $I(0)$  cuando el proceso es  $I(0)$  con cambio estructural siempre que  $\tau < \lambda$ , de forma que tenderá a identificar un cambio en persistencia de  $I(0)$  a  $I(1)$ , mientras que si  $\tau \geq \lambda$  el estadístico converge rápidamente a cero y tenderá a identificar correctamente que el proceso es  $I(0)$ . Sin embargo, si se utiliza en este caso el recíproco,  $\hat{K}_{n,p}^{-1}(\tau, \lambda)$ , tenderá a identificar erróneamente que hay un cambio en persistencia de  $I(1)$  a  $I(0)$ . En el caso general de  $\tau$  desconocido se requiere especificar un conjunto de valores factible  $\tau \in [\tau_l, \tau_u]$  para la implementación de los contrastes incondicionales basados en los estadísticos  $H_j(\cdot)$  y  $H'_j(\cdot)$  descritos en la sección 2. Así, si  $\lambda_0 \leq \tau_l$  se verifican los resultados en (a), mientras que si  $\lambda_0 > \tau_u$  son de aplicación los resultados en (b) para toda la secuencia de estadísticos calculados  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$  y  $\hat{K}_{n,p}^{-1}(\tau, \lambda)$ , así como para los estadísticos  $H_j(\cdot)$  y  $H'_j(\cdot)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

El siguiente resultado establece la modificación de la distribución asintótica nula de los componentes del numerador y denominador del estadístico-ratio bajo omisión de un cambio estructural en el componente sistemático.

**Teorema 4.2.** *En el modelo (4.2), con términos de error  $\varepsilon_t$  estacionarios, que verifican condiciones suficientes para ser de aplicación algún principio de invarianza, entonces para un valor dado  $\tau \in [\tau_l, \tau_u] \in (0, 1)$ , un punto de cambio estructural  $\lambda \in (0, 1)$  y el supuesto (A.2) sobre la magnitud de los coeficientes de salto y la secuencia de alternativas locales dada por  $\sigma_u^2 = (\frac{c}{n})^2$  con  $c \geq 0$ , se tiene que:*

$$(i) \hat{A}_{n,p}(\tau, \lambda) \Rightarrow A_p(\tau, \lambda) = \omega_\varepsilon^2 (1-\tau)^{-2} \int_\tau^1 [V_{k,p}^{(2)}(s, \tau_0) + \tilde{T}_p^{(2)}(s, \lambda)]^2 ds$$

$$(ii) \hat{B}_{n,p}(\tau, \lambda) \Rightarrow B_p(\tau, \lambda) = \omega_\varepsilon^2 \tau^{-2} \int_0^\tau [V_{k,p}^{(1)}(s, \tau_0) + \tilde{T}_p^{(1)}(s, \lambda)]^2 ds$$

$$(iii) \hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) \Rightarrow B_p^{-1}(\tau, \lambda) \cdot A_p(\tau, \lambda)$$

con los procesos deterministas límite  $\tilde{T}_p^{(j)}(s, \lambda) = \frac{1}{\omega_\varepsilon} T_p^{(j)}(s, \lambda)$   $j = 1, 2$ , y  $T_p^{(j)}(s, \lambda)$  dados por las ecuaciones (A.16) y (A.17) del Apéndice A.

**Prueba.** Ver Apéndice A. En este caso, el efecto de la omisión del cambio estructural sobre la distribución límite de los componentes del estadístico ratio depende tanto de los

puntos de localización  $(\lambda, \tau)$  como de la magnitud de los coeficientes de salto en relación con  $\omega_\varepsilon$ , es decir,  $c_i/\omega_\varepsilon$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , en  $\tilde{T}_p^{(j)}(s, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$ .

**Observación 4.2.** Para obtener la correspondiente distribución asintótica bajo cualquiera de las alternativas dadas por  $k = 1, 2$  o  $3$ , para una varianza  $\sigma_u^2 > 0$  fija con el tamaño muestral, es necesario considerar la siguiente modificación del supuesto (A.2) sobre la magnitud de los coeficientes de salto.

**Supuesto A.2'** La magnitud de los coeficientes de salto,  $\delta_i$ ,  $i=0,1,\dots,p$ , tiende a cero con el tamaño muestral a una tasa  $n^{-1/2}$ , es decir,  $\delta_i = \frac{c_i}{n^{1/2}}$ , con  $c_i = O(1)$ ,  $i=0,1,\dots,p$ .

Así se tiene entonces que en este caso las distribuciones límites de los componentes del numerador y denominador de  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$  son como en (i) y (ii) del Teorema 4.2 con  $V_{k,p}^{(j)}(r, \tau_0)$  como en las ecuaciones (2.12) y (2.13), pero con  $V_k(r, \tau_0)$  en lugar de  $V_{k,c}(r, \tau_0)$ , puesto que los procesos de suma parcial del numerador y denominador del estadístico  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$  han de normalizarse por  $n^{-3/2}$  y en (2.7) y (2.8) se tiene que  $n^{-3/2} \sum_{t=1}^{\lfloor nr \rfloor} \varepsilon_t = O_p(n^{-1}) = o_p(1)$ .

## 5. Comportamiento de los contrastes de estacionariedad con cambio estructural bajo la alternativa de cambio en persistencia.

En este apartado vamos a estudiar el comportamiento y distribución asintótica finita de los estadísticos considerados en la sección 3 para el contraste de estacionariedad en torno a una tendencia polinomial con ruptura cuando el verdadero PGD incluye un componente sistemático determinista constante con un cambio en la estructura del componente no sistemático, en particular un cambio en persistencia en alguna de las dos direcciones posibles, es decir, cuando viene dado por las ecuaciones (2.1)-(2.2), en el caso de cambio en persistencia de I(0) a I(1), o (2.1) y (2.3), en el caso de cambio en persistencia de I(1) a I(0) en el punto  $[n\tau_0]$ , con punto de cambio conocido  $\tau_0 \in (0,1)$ . Puesto que en cualquiera de los dos casos, se incluye una raíz unitaria parcial es de esperar que los estadísticos indicados divergan e indiquen erróneamente evidencia de no estacionariedad estocástica con cambio estructural en el componente sistemático.

En esta situación, los residuos MCO de la regresión auxiliar de los contrastes de estacionariedad con cambio estructural, ecuación (3.4), vienen dados ahora por

$$\hat{\eta}_{t,p}(\lambda, \tau_0) = \eta_{k,t}(\tau_0) - \mathbf{x}'_{t,p}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) - \boldsymbol{\beta}_p) - \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda)(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) - \boldsymbol{\delta}_p) \quad (5.1)$$

donde los estimadores de  $\boldsymbol{\beta}_p$  y  $\boldsymbol{\delta}_p$  son como en (3.5) como función de los términos de

error generalizados en (2.5) y (2.6), siendo en este caso el verdadero PGD el siguiente

$$y_j = (\mathbf{x}'_{j,p}, \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda)) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{0}_{p+1} \end{pmatrix} + \eta_{k,j}(\tau_0) \quad (5.2)$$

de forma que  $\boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{0}_{p+1}$  en (5.1), y con los términos de error  $\eta_{k,j}(\tau_0)$  definidos ahora como en las ecuaciones (2.5) y (2.6). A partir de (5.1), se tiene que la suma parcial normalizada de residuos MCO viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \hat{\eta}_{j,p}(\lambda, \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_{k,j}(\tau_0) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) - \boldsymbol{\beta}_p) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} h_j(\lambda) \hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) \end{aligned} \quad (5.3)$$

para  $r \in [0,1]$ , con  $n^{-1/2} \sum_{j=1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} h_j(\lambda) = n^{-1/2} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \mathbf{x}'_{j,p} h_j(\lambda) I(r \geq \lambda)$ . A partir de

este proceso de suma parcial de residuos MCO, los estadísticos de contraste de la hipótesis nula  $I(0)$  bajo cambio estructural de la sección 3 se definen ahora como

$$\hat{M}_{p,q_n}^{(1)}(\lambda, \tau_0) = \frac{1}{n \cdot \hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0)} \sum_{t=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \right)^2 \quad (5.4)$$

$$\hat{M}_{p,q_n}^{(2)}(\lambda, \tau_0) = \frac{1}{n \cdot \hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0)} \left\{ \sum_{t=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \right)^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \right)^2 \right\} \quad (5.5)$$

$$\hat{M}_{p,q_n}^{(3)}(\lambda, \tau_0) = \frac{1}{\hat{\omega}_{n,q_n}(\lambda, \tau_0)} \max_{t=1, \dots, n} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{t,p}(\lambda, \tau_0) - \frac{t}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{n,p}(\lambda, \tau_0) \right) \right| \quad (5.6)$$

Teniendo en cuenta la estructura de los términos de error en (5.3), según se considere el caso de una alternativa de cambio en persistencia de  $I(0)$  a  $I(1)$  o al contrario, en el Apéndice B se demuestra que el proceso (5.3) diverge, de forma que los estadísticos para el contraste de estacionariedad con cambio estructural tienen potencial no trivial frente a la alternativa de cambio en persistencia. Este resultado es evidente, teniendo en cuenta que el PGD considerado en (5.2) está muy próximo, salvo por la no consideración del cambio estructural, a la hipótesis alternativa de no estacionariedad  $I(1)$  permanente con cambio estructural de estos contrastes. Sin embargo, en este caso puede comprobarse como la potencia del contraste depende fundamentalmente de la relación entre los valores del par  $(\tau_0, \lambda)$ , puesto que si en (5.3) se hace  $\tau_0 \rightarrow 1 (\rightarrow 0)$ ,  $\eta_t(\tau_0) = \varepsilon_t$  para casi toda la muestra, de forma que el cambio en persistencia de  $I(0)$  a  $I(1)$  (de  $I(1)$  a  $I(0)$ ) casi no debe tener efecto sobre el comportamiento de los estadísticos (5.4)-(5.6), más allá de que nos encontraríamos en este caso con un error de especificación por inclusión errónea del componente de cambio estructural. Estos resultados se formalizan en el siguiente Teorema 5.1.

**Teorema 5.1.** *Bajo los supuestos apropiados relativos al comportamiento de los términos de error en el modelo (5.2),(2.5)-(2.6) de cambio en persistencia ( $k=1,2$ ), en los contrastes de estacionariedad con cambio estructural se tienen los siguientes resultados:*

$$(i) (n\sqrt{n})^{-1}\hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \omega_u B_{k,p}(r, \tau_0)$$

$$(ii) B_{k,p}(r, \tau_0) = V_k(r, \tau_0) - \int_0^r \mathbf{x}'_p(s) ds \left( \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) dV_k(s, \tau_0) \\ - I(r > \lambda) \int_\lambda^r \mathbf{x}'_p(s) ds \left( \left( \int_\lambda^1 \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_\lambda^1 \mathbf{x}_p(s) dV_k(s, \tau_0) - \left( \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) dV_k(s, \tau_0) \right)$$

$$(iii) \hat{M}_{p,q_n}^{(j)}(\lambda, \tau_0) = O_p(n/q_n), j = 1, 2, \hat{M}_{p,q_n}^{(3)}(\lambda, \tau_0) = O_p(\sqrt{n/q_n})$$

**Prueba.** Ver Apéndice B.<sup>4</sup>

**Observación 5.1.** En el caso  $p = 0$  (corrección por la media), se tiene que el proceso límite  $B_{k,0}(r, \tau_0)$  viene dado, para  $(\lambda, \tau_0) \in (0,1)$ , por

$$B_{k,0}(r, \tau_0) = V_k(r, \tau_0) - \frac{r}{\lambda} V_k(\lambda, \tau_0) - I(r > \lambda) \frac{r - \lambda}{\lambda(1 - \lambda)} [\lambda V_k(1, \tau_0) - V_k(\lambda, \tau_0)]$$

Con objeto de obtener un resultado útil en términos de una distribución asintótica para estos estadísticos de contraste en el caso analizado, tal como realizan Buseti y Harvey (2004), se considera la secuencia de alternativas locales donde  $\sigma_u^2 = (c/n)^2$ , con  $c \geq 0$ , de forma que  $\omega_u^2 = (\frac{c}{n})^2 \cdot \tilde{\omega}_u^2$ . Así, es posible enunciar el siguiente resultado relativo a la distribución asintótica de los contrastes de estacionariedad (5.4)-(5.6) bajo la alternativa de cambio en persistencia, que se prueba también en el Apéndice B.

**Teorema 5.2.** *En el caso del modelo de cambio en persistencia (5.2),(2.5)-(2.6) para  $k=1,2$ , con  $\omega_u^2 = \sigma_u^2 \cdot \tilde{\omega}_u^2$  y  $\sigma_u^2 = (c/n)^2$  con  $c \geq 0$ , en el caso de la regresión auxiliar de los contrastes de estacionariedad con cambio estructural, se tiene:*

$$(i) n^{-1/2} \hat{S}_{[nr],p}^0(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \omega_\varepsilon B_{k,p}^0(r, \tau_0)$$

$$(ii) \hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \omega_\varepsilon^2 K(w) \int_0^1 B_{k,p}^0(s, \tau_0)^2 ds$$

$$(iii) \hat{M}_{p,q_n}^{(1)}(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \int_0^1 \left( \int_0^r B_{k,p}^0(s, \tau_0) ds \right)^2 dr / K(w) \int_0^1 B_{k,p}^0(s, \tau_0)^2 ds$$

$$(iv) \hat{M}_{p,q_n}^{(2)}(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \left\{ \int_0^1 \left( \int_0^r B_{k,p}^0(s, \tau_0) ds \right)^2 dr - \left( \int_0^1 \left( \int_0^r B_{k,p}^0(s, \tau_0) ds \right) dr \right)^2 \right\} / K(w) \int_0^1 B_{k,p}^0(s, \tau_0)^2 ds$$

$$(v) \hat{M}_{p,q_n}^{(3)}(\lambda, \tau_0) \Rightarrow \left( K(w) \int_0^1 B_{k,p}^0(s, \tau_0)^2 ds \right)^{-1/2} \sup_{0 \leq s \leq 1} |B_{k,p}^0(s, \tau_0) - s B_{k,p}^0(1, \tau_0)|$$

donde  $B_{k,p}^0(r, \tau_0)$  es como  $B_{k,p}(r, \tau_0)$  en (ii) del Teorema 5.1, con  $V_k(r, \tau_0)$  reemplazado por  $V_{k,c}(r, \tau_0) = W_0(r) + c \frac{\tilde{\omega}_u}{\omega_\varepsilon} V_k(r, \tau_0)$ , para  $c \geq 0$ .

De los resultados de estos dos teoremas se obtiene la forma específica en que la distribución asintótica de estos estadísticos condicionales depende del punto de cambio

<sup>4</sup> En Afonso-Rodríguez (2010) se incluyen los resultados numéricos de un estudio de simulación donde se cuantifican las distorsiones en el tamaño de estos contrastes debido a la existencia de un cambio en persistencia en el comportamiento del término de error del PGD y en ausencia de cambio estructural.

estructural considerado erróneamente,  $\lambda$ , y del punto de cambio en persistencia  $\tau_0$ . En el caso de emplear la versión en dos etapas de dichos estadísticos basadas en el estimador pre-contraste de Bai (1994, 97), como se ha indicado en la sección 3, podrían emplearse estos resultados únicamente previo establecimiento de la consistencia de dicho estimador, cuestión esta que no se ha abordado en el presente estudio.

## 6. Aplicación. Series de tipo de interés e inflación para el análisis del efecto Fisher

Una de las pocas evidencias disponibles en la literatura de series que presentan un cambio en persistencia es la serie de tasa de inflación trimestral en EEUU (ver Busetti y Taylor (2004)). Por esta razón consideramos los resultados de los contrastes analizados en este trabajo para las series trimestrales de tipo de interés nominal a largo plazo y de inflación en la economía americana en el contexto del análisis del efecto Fisher. En relación con este fenómeno, recientemente Christopoulos y León-Ledesma (2007) han aportado evidencia de una relación no lineal entre las tasas de inflación y de interés nominal para la economía americana en el período 1960-2004. Beyer et.al. (2009) argumentan que la no linealidad podría ser consecuencia de la omisión de un cambio estructural, de forma que una relación lineal con ruptura podría ser aproximada incorrectamente por una relación no lineal.

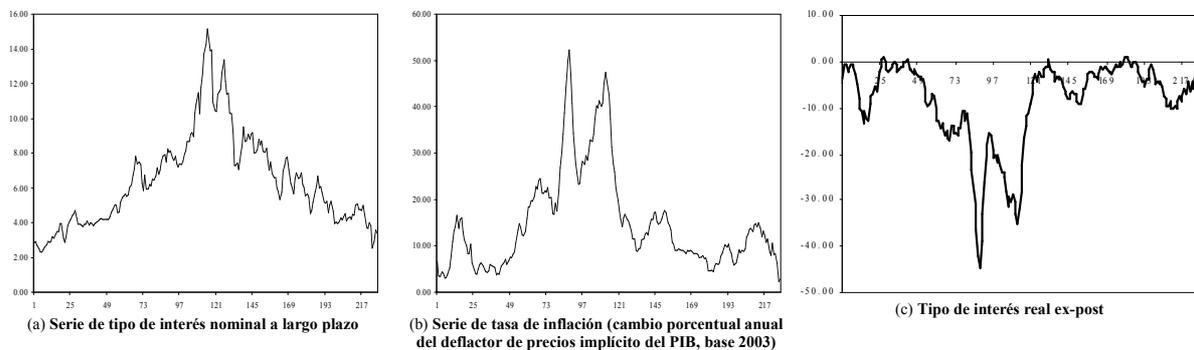
La ecuación de Fisher establece la descomposición del tipo de interés nominal,  $i_t$ , en el tipo de interés real *ex-ante*,  $r_t^e$ , y la tasa de inflación esperada en  $t-1$  para el siguiente periodo,  $\pi_t^e$ , de la forma  $i_t = r_t^e + \pi_t^e$ . Esta relación se puede transformar en el siguiente modelo econométrico

$$i_t = \alpha + \beta\pi_t + \eta_t \quad t = 1, \dots, n \quad (6.1)$$

donde  $\pi_t$  es la tasa de inflación observable, que resulta de incorporar el supuesto de expectativas racionales de la forma  $\pi_t^e = \pi_t + \varepsilon_t$  con  $\varepsilon_t$  un error de predicción aleatorio que se asume estacionario, y donde  $\eta_t = \beta\varepsilon_t + (r_t^e - \alpha) + \pi_t^e(1 - \beta)$ . Se espera que en ausencia de ilusión monetaria  $r_t^e$  sea aproximadamente constante, de forma que en ese caso  $\eta_t \approx \beta\varepsilon_t + \pi_t^e(1 - \beta)$ . El no rechazo de la hipótesis nula  $\beta = 1$  indicaría así la presencia de un efecto Fisher completo. En este caso, puesto que el término de error  $\eta_t$  sería estacionario, el efecto Fisher se verificaría si el par de variables  $(i_t, \pi_t)$  están cointegradas, lo que requiere que ambas series sean I(1). Alternativamente a (6.1) se puede plantear la siguiente regresión a partir de la serie de tipo de interés real ex-post,

$$r_t = i_t - \pi_t = \alpha + (\beta - 1)\pi_t + \eta_t = \alpha + \beta' \pi_t + \eta_t \quad t = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

donde ahora  $\beta' = \beta - 1$ . Además, bajo expectativas racionales, se tiene la siguiente relación entre los tipos de interés *ex-post* y *ex-ante*,  $r_t = r_t^e + \varepsilon_t$ , de forma que si  $\varepsilon_t$  es  $I(0)$ , entonces la estacionariedad del primero implicaría la estacionariedad del segundo. Como proxies de estas variables se han utilizado las series de rendimientos trimestrales de los bonos del tesoro a 10 años con tasa de maduración constante y el cambio porcentual anual del deflactor de precios implícito del PIB (corregido por estacionalidad), con base 2003, para el período 1953Q2-2009Q4, con un total de  $n = 227$  observaciones<sup>5</sup>. El siguiente gráfico presenta las series objeto de análisis,  $i_t$  y  $\pi_t$ , y la serie de tipos de interés real *ex-post*,  $r_t = i_t - \pi_t$ .



Los siguientes cuadros presentan los resultados de los contrastes de estacionariedad frente a cambio en persistencia (cuadro 1) basados en el estadístico-ratio y frente a raíz unitaria considerando un posible cambio estructural sistemático (cuadros 2 y 3) empleando los estadísticos estudiados en las secciones 3 y 5.

**CUADRO 1. RESULTADOS DE LOS CONTRASTES DE CAMBIO EN PERSISTENCIA**

|                                  |  | Serie 1. Tipo interés |                  | Serie 2. Tasa inflación |                 | Serie 3. Tipo interés real |                 |
|----------------------------------|--|-----------------------|------------------|-------------------------|-----------------|----------------------------|-----------------|
|                                  |  | $p = 0$               | $p = 1$          | $p = 0$                 | $p = 1$         | $p = 0$                    | $p = 1$         |
| $I(0)$ vs $H_{01}$ : $I(0)-I(1)$ | $j = 1$                                | 100.621 (0.225)       | 2162.342 (0.256) | 156.692 (0.259)         | 79.257 (0.229)  | 93.449 (0.259)             | 52.096 (0.361)  |
|                                  | $\hat{H}_{j,p}(\hat{\tau}_n)$ $j = 2$  | 7.440                 | 176.102          | 18.081                  | 5.124           | 11.766                     | 3.986           |
|                                  | $j = 3$                                | 63.074                | 57.831           | 80.483                  | 74.053          | 79.789                     | 46.892          |
| $I(0)$ vs $H_{10}$ : $I(1)-I(0)$ | $j = 1$                                | 236.995 (0.841)       | 230.649 (0.740)  | 115.534 (0.529)         | 256.376 (0.683) | 114.605 (0.524)            | 262.686 (0.586) |
|                                  | $\hat{H}'_{j,p}(\hat{\tau}_n)$ $j = 2$ | 21.676                | 41.737           | 25.847                  | 23.477          | 18.478                     | 19.645          |
|                                  | $j = 3$                                | 67.397                | 81.026           | 82.579                  | 81.287          | 78.331                     | 71.262          |
| Dirección de cambio desconocida  | $j = 4$                                | 236.995               | 2162.342         | 156.692                 | 256.376         | 114.605                    | 262.686         |
|                                  | $\hat{H}_{j,p}(\hat{\tau}_n)$ $j = 5$  | 21.676                | 176.102          | 25.847                  | 23.477          | 18.478                     | 19.645          |
|                                  | $j = 6$                                | 67.397                | 81.026           | 82.579                  | 81.287          | 79.789                     | 71.262          |

**Nota 1.** Entre paréntesis se indican los puntos de cambio estimados empleando (2.14), con  $\Lambda = [\tau_i, \tau_u]$ ,  $\tau_i = 0.10$  y  $\tau_u = 0.90$ , y el criterio de estimación indicado bajo las alternativas  $H_{01}$  o  $H_{10}$ .

**Nota 2.** Los cuantiles de la distribución nula al 5% nominal para una muestra de tamaño  $n=200$  son 17.317, 4.713 y 5.090 ( $p=0$ ) y 8.435, 2.853 y 1.986 ( $p=1$ ) para  $j = 1, 2$  y 3 en el caso del contraste frente a  $H_{01}$ , y 17.274, 4.504 y 5.039 ( $p=0$ ) y 8.241, 2.815 y 1.886 ( $p=1$ ) para  $j = 1, 2$  y 3 en el caso del contraste frente a  $H_{10}$ . Estos cuantiles empíricos se han calculado mediante simulación con 10000 repeticiones y errores  $(\varepsilon_{i,t}, u_t)$  iidN(0,1) y pueden consultarse en Afonso-Rodríguez (2010).

Estos resultados muestran un claro rechazo de la hipótesis nula de estacionariedad, a cualquier nivel de significación, frente a ambas alternativas,  $H_{01}$  y  $H_{10}$ , con evidencia

<sup>5</sup> Fuentes: Board of Governors of the Federal Reserve System y US Department of Commerce.

más contundente de rechazo frente al cambio en persistencia de I(1) a I(0) en casi todos los casos considerados. En cuanto a los resultados del siguiente cuadro 2, considerando la ausencia de un posible cambio estructural, se puede considerar que la evidencia es en cierta medida favorable al rechazo de la hipótesis nula de estacionariedad para las tres series frente a la alternativa I(1). Considerando un posible cambio estructural, los resultados de los contrastes incondicionales son básicamente los mismos, mientras que los resultados del cuadro 3 indican una clara evidencia de rechazo de la hipótesis nula de estacionariedad frente a la alternativa de raíz unitaria con cambio estructural estimado, aproximadamente, en la mitad de la muestra para las tres series. Dados los resultados presentados en el cuadro 2 y bajo el Teorema 5.1, el rechazo de  $H_0$  podría ser debido a la existencia de un cambio en persistencia.

**CUADRO 2. RESULTADOS DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL: CONTRASTES INCONDICIONALES**

|                           |         | Serie 1. Tipo interés      |                            | Serie 2. Tasa inflación    |                            | Serie 3. Tipo interés real |                            |
|---------------------------|---------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
|                           |         | $p = 0$                    | $p = 1$                    | $p = 0$                    | $p = 1$                    | $p = 0$                    | $p = 1$                    |
| A. Sin cambio estructural | $j = 1$ | 0.408                      | 0.357 <sup>a</sup>         | 0.286                      | 0.267 <sup>a</sup>         | 0.270                      | 0.214 <sup>a</sup>         |
|                           | $j = 2$ | 0.359 <sup>a</sup>         |                            | 0.276 <sup>a</sup>         |                            | 0.236 <sup>a</sup>         |                            |
|                           | $j = 3$ | 1.060                      | 0.835 <sup>b</sup>         | 0.844                      | 0.876 <sup>b</sup>         | 1.037                      | 0.797 <sup>b</sup>         |
| B. Con cambio estructural | $j = 1$ | 0.289 (0.132)              | 0.040 (0.432) <sup>b</sup> | 0.228 (0.811)              | 0.056 (0.555) <sup>b</sup> | 0.173 (0.758)              | 0.055 (0.542) <sup>b</sup> |
|                           | $j = 2$ | 0.259 (0.203) <sup>a</sup> |                            | 0.196 (0.718) <sup>a</sup> |                            | 0.148 (0.678) <sup>a</sup> |                            |
|                           | $j = 3$ | 0.773 (0.0881)             | 0.529 (0.507)              | 0.791 (0.969)              | 0.501 (0.489)              | 0.761 (0.775)              | 0.491 (0.537)              |

**Nota 1.** Los estadísticos se han calculado empleando  $\Lambda = [0.10, 0.90]$  y el estimador no-paramétrico de la varianza a largo plazo con kernel de Bartlett y bandwidth fijo,  $q_n = [a \cdot (n/100)^{(1/b)}]$ ,  $a = 12$ ,  $b = 4$ . Entre paréntesis se muestran las estimaciones de los puntos de cambio estructural empleando (3.12) para los contrastes de estacionariedad con cambio estructural KPSS, V/S y KS,  $\hat{\lambda}_{n,p}^{(j)} = \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \tilde{M}_{n,p}^{(j)}(q_n, \lambda)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

**Nota 2.** El superíndice <sup>a</sup> indica rechazo al 5% de significación, mientras que <sup>b</sup> indica rechazo al 10% de significación. Para los contrastes de estacionariedad sin cambio estructural (panel A), los cuantiles críticos al 5% nominal son 0.46035, 0.18649 y 1.34744 ( $p=0$ ) para  $j = 1, 2$  y 3, y 0.14661, para  $j = 1, 2$ , y 0.90202 ( $p=1$ ) para  $j = 3$ . Para los contrastes con cambio estructural (panel B) los valores críticos se obtienen por interpolación lineal empleando el valor estimado del punto de cambio estructural. Estos cuantiles empíricos se han calculado mediante simulación con 10000 repeticiones y  $n = 1000$  y pueden consultarse en Afonso-Rodríguez (2010) o, con valores muy próximos, en Busetti y Harvey (2001).

**CUADRO 3. RESULTADOS DE LOS CONTRASTES DE ESTACIONARIEDAD CON CAMBIO ESTRUCTURAL: CONTRASTE CONDICIONAL EN DOS ETAPAS DE Buseti y HARVEY (2003)**

|  |                         | Serie 1. Tipo interés |                    | Serie 2. Tasa inflación |                    | Serie 3. Tipo interés real |                    |
|--|-------------------------|-----------------------|--------------------|-------------------------|--------------------|----------------------------|--------------------|
|  |                         | $p = 0$               | $p = 1$            | $p = 0$                 | $p = 1$            | $p = 0$                    | $p = 1$            |
| Estimador pre-contraste del punto de cambio de Bai (1994,1997) | $\tilde{\lambda}_{n,p}$ | 0.264                 | 0.467              | 0.233                   | 0.515              | 0.529                      | 0.511              |
|  | $j = 1$                 | 0.469 <sup>a</sup>    | 0.081 <sup>a</sup> | 0.602 <sup>a</sup>      | 0.073 <sup>a</sup> | 0.398 <sup>a</sup>         | 0.069 <sup>a</sup> |
|  | $j = 2$                 | 0.308 <sup>a</sup>    |                    | 0.299 <sup>a</sup>      |                    | 0.229 <sup>a</sup>         |                    |
|  | $j = 3$                 | 1.297 <sup>a</sup>    | 0.815 <sup>a</sup> | 1.511 <sup>a</sup>      | 0.641              | 1.336 <sup>a</sup>         | 0.637              |

**Nota.** (ver notas 1 y 2 del CUADRO 2)

En resumen, existe evidencia estadística suficiente de no estacionariedad constante de las series consideradas, aunque se obtienen resultados contradictorios en cuanto a la naturaleza del posible cambio de estructura, pudiendo ser tanto debido a un cambio en persistencia o a un cambio en el componente sistemático.

Considerando la validez de la ecuación de Fisher y de los supuestos considerados, el término de error en (6.1) y (6.2) puede escribirse también como  $\eta_t = \varepsilon_t + (r_t^e - \alpha) + \pi_t(1 - \beta)$ , y así una aproximación simple a la evaluación del cumplimiento del efecto Fisher y a la

estimación de la posible relación de cointegración puede basarse en el estimador MCO de  $\beta$  en (6.1), que puede escribirse entonces como

$$\hat{\beta}_n = 1 + \frac{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t (\pi_t - \bar{\pi}_n) + \sum_{t=1}^n r_t^e (\pi_t - \bar{\pi}_n)}{\sum_{t=1}^n (\pi_t - \bar{\pi}_n)^2} \quad (6.3)$$

cuyo comportamiento depende fundamentalmente de la naturaleza estocástica de la tasa de inflación observable. Admitiendo la siguiente representación general para la serie  $\pi_t$ ,

$$\pi_t = \mathbf{x}'_{t,p} \beta_p + \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \delta_p + \eta_{k,t}(\tau) \quad t = 1, \dots, n \quad (6.4)$$

con inclusión de un posible cambio estructural en el componente determinista con  $\eta_{k,t}(\tau)$  como en (2.5) y (2.6), con distintos grados y tipos de persistencia posibles, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_t - \bar{\pi}_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{D}_p (\mathbf{x}_{t,p} - \bar{\mathbf{x}}_{n,p})]' \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\theta}_p \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} [\mathbf{D}_p (\mathbf{x}_{t,p} (1 - h_t(\lambda)) - \frac{[n\lambda]}{n} \bar{\mathbf{x}}_{[n\lambda],p})]' \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\delta}_p + \eta_{k,t}(\tau) - \bar{\eta}_{k,n}(\tau) \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde  $\boldsymbol{\theta}_p = \beta_p + \delta_p$ , y donde se puede escribir  $\boldsymbol{\theta}_{p,n} = \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\theta}_p$  y  $\boldsymbol{\delta}_{p,n} = \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\delta}_p$ , con  $\boldsymbol{\theta}_p^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\theta}_{p,n}$  y  $\boldsymbol{\delta}_p^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\delta}_{p,n}$ . Asumiendo que  $r_t^e$  es aproximadamente constante, y estacionariedad del error  $\varepsilon_t$ , el término relevante en (6.3) vendrá dado por

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t (\pi_t - \bar{\pi}_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t [\mathbf{D}_p (\mathbf{x}_{t,p} - \bar{\mathbf{x}}_{n,p})]' \boldsymbol{\theta}_{p,n} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t [\mathbf{D}_p (\mathbf{x}_{t,p} (1 - h_t(\lambda)) - \frac{[n\lambda]}{n} \bar{\mathbf{x}}_{[n\lambda],p})]' \boldsymbol{\delta}_{p,n} + \sum_{t=1}^n \varepsilon_t [\eta_{k,t}(\tau) - \bar{\eta}_{k,n}(\tau)] \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde los dos primeros términos en el segundo miembro de (6.6) tienen límite dado por

$$\omega_\varepsilon \left\{ \int_0^1 \mathbf{x}'_p(s) dB(s) \boldsymbol{\theta}_p^0 - \int_0^\lambda \mathbf{x}'_p(s) dB(s) \boldsymbol{\delta}_p^0 \right\} = \omega_\varepsilon \left\{ \int_0^1 \mathbf{x}'_p(s) dB(s) \boldsymbol{\beta}_p^0 + \int_\lambda^1 \mathbf{x}'_p(s) dB(s) \boldsymbol{\delta}_p^0 \right\} \quad (6.7)$$

con  $B(s) = W(s) - sW(1)$  un proceso puente browniano estándar, y que depende de la localización del posible cambio estructural y de las magnitudes límite de los coeficientes de la tendencia polinomial y de los saltos, mientras que el límite del último término en (6.6) dependerá de la naturaleza estocástica de  $\pi_t$ , es decir, de si es estacionario ( $k = 0$ ), si presenta una raíz unitaria constante ( $k = 3$ ) o un cambio en persistencia en alguna de las dos direcciones posibles ( $k = 1, 2$ ) (ver sección 2). En el caso  $k = 3$ , en ausencia de componentes deterministas en (6.5), el estimador MCO, (6.3), en la regresión estática (6.1) es superconsistente de  $\beta$  (Stock (1987)). En los casos  $k = 1, 2$  (cambios en persistencia), dada la presencia de una tendencia estocástica parcial en la muestra, es de esperar un resultado similar, aunque queda por probar dicho resultado, así como el efecto debido a la omisión del cambio estructural en el componente sistemático, si ese es el caso.

## 7. Conclusiones

En este trabajo hemos considerado el problema de la contrastación de la estacionariedad estocástica,  $I(0)$ , frente a estacionariedad en diferencias,  $I(1)$  o raíz unitaria, en el

contexto de posibles cambios estructurales de diferente carácter, sistemático (en el componente determinista del modelo) o no sistemático (en el grado de persistencia del término de perturbación del modelo). Este último caso corresponde a la reciente propuesta de tratar de identificar cambios en la estacionariedad de un proceso a lo largo de una muestra, denominado cambios en persistencia. Hemos considerado el comportamiento, en términos de consistencia y potencia (tanto analítica como numéricamente) de algunos contrastes noparamétricos de la hipótesis  $I(0)$  frente a cambios en persistencia, así como de algunos de los contrastes noparamétricos más utilizados en la práctica de la hipótesis  $I(0)$  con cambio estructural frente a  $I(1)$ . Se ha demostrado que ambos tipos de contrastes presentan potencia no trivial frente a la alternativa representada por un cambio estructural de naturaleza diferente a la asumida en cada caso, de forma que estos contrastes de cambio en persistencia pueden identificar un proceso estacionario con cambio estructural sistemático, mientras que los contrastes de  $I(0)$  con cambio estructural tienden a rechazar, en general, la hipótesis nula en presencia de un cambio en persistencia del proceso, aunque también identificar erróneamente estacionariedad estocástica en torno a un componente determinista con cambio estructural bajo dicha hipótesis de comportamiento, dependiendo de la relación entre la localización estimada y verdadera de ambos puntos de cambio, especialmente cuando ambas están próximas entre sí y hacia el final de la muestra. Para completar el análisis realizado en este trabajo queda pendiente el estudio del comportamiento y consistencia de los estimadores de los puntos de cambio en persistencia, ecuación (2.14), y estructural  $\hat{\lambda}_n$  y  $\tilde{\lambda}_n$ , bajo los errores de especificación considerados en cada uno de los casos.

## Referencias

- Afonso-Rodríguez, J.A. (2010):** Cambios en persistencia o cambio estructural en las series de comercio internacional de Canarias. VII Seminario de Economía Canaria, La Laguna.
- Bai, J. (1994):** Least squares estimation of a shift in linear processes, *Journal of Time Series Analysis*, 15, pp.453-472.
- Bai, J. (1997):** Estimation of a change point in multiple regression models, *The Review of Economics and Statistics*, 79, pp.551-563.
- Beyer, A., A.A. Haug y W.G. Dewald (2009):** Structural breaks, cointegration and the Fisher effect, European Central Bank Working paper series no.1013.
- Buseti, F. y A.M.R. Taylor (2004):** Tests of stationarity against a change in persistence, *Journal of Econometrics*, 123, pp.33-66.
- Buseti, F. y A. Harvey (2001):** Testing for the presence of a random walk in series with structural breaks, *Journal of Time Series Analysis*, 22, pp.127-150.
- Buseti, F. y A. Harvey (2003):** Further comments on stationarity tests in series with structural breaks at unknown points, *Journal of Time Series Analysis*, 24, pp.137-140.
- Carrion-i-Silvestre, J.L. y A. Sansó (2006):** A guide to the computation of stationarity tests, *Empirical Economics*, 31, pp.433-448.

- Christopoulos, D.K. y M.A. León-Ledesma (2007):** A long-run nonlinear approach to the Fisher effect, *Journal of Money, Credit and Banking*, 39, pp.543-559.
- Cook, S. (2004):** Detecting changes in persistence in linear time series, *Economics Bulletin*, 3, pp.1-11.
- den Haan, W.J. y A. Levin (1997):** A practitioners guide to robust covariance matrix estimation, *Handbook of Statistics* 15, 12, pp.291-341.
- den Haan, W.J. y A. Levin (2000):** Robust covariance matrix estimation with data-dependent VAR prewhitening order, NBER Technical Working Paper 255.
- Giraitis, L., P. Kokoszka, R. Leipus y G. Teyssiere (2003):** Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels, *Journal of Econometrics*, 112, pp.265-294.
- Giraitis, L., P. Kokoszka, R. Leipus y G. Teyssiere (2005):** Corrigendum to “Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels”, *Journal of Econometrics*, 126, pp.571-572.
- Harvey, D.I. y T.C. Mills (2003):** A note on Buseti-Harvey tests for stationarity in series with structural breaks, *Journal of Time Series Analysis*, 24, pp.159-164.
- Kim, J. (2000):** Detection of change in persistence of a linear time series, *Journal of Econometrics*, 95, pp.97-116.
- Kim, J., J. Balaire Franch y R. Badillo Amador (2002):** Corrigendum to “Detection of change in persistence of a linear time series”, *Journal of Econometrics*, 109, pp.389-392.
- Kwiatkowski, D., P.C.B. Phillips, P. Schmidt y Y. Shin (1992):** Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how sure are we that economic time series have a unit root?, *Journal of Econometrics*, 54, pp.159-178.
- Lee, J., C.J. Huang e Y. Shin (1997):** On stationarity tests in the presence of structural breaks, *Economics Letters*, 55, pp.165-172.
- Leybourne, S., T.-H. Kim, V. Smith y P. Newbold (2003):** Tests for a change in persistence against the null of difference stationarity, *Econometrics Journal*, 6, pp.290-310.
- Leybourne, S., R. Taylor y T.-H. Kim (2006):** CUSUM of squares-based tests for a change in persistence, *Journal of Time Series Analysis*, 28(3), pp.408-433.
- Phillips, P.C.B. (1991):** Spectral regression for cointegrated time series, en: Barnett, ed., *Nonparametric and semiparametric methods in Economics and Statistics*. Cambridge University Press.
- Stock, J.H. (1987):** Asymptotic properties of least squares estimators of cointegrating vectors, *Econometrica*, 55(5), pp.1035-1056.
- Taylor, A.M.R. (2005):** Fluctuation tests for a change in persistence, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 67, pp.207-230.
- Xiao, Z. (2001):** Testing the null hypothesis of stationarity against an autoregressive unit root alternative, *Journal of Time Series Analysis*, 22, pp.87-105.

## APÉNDICE A. Prueba del Teorema 4.1

Se considera de forma general que el PGD viene dado por un componente sistemático en forma de tendencia polinomial de orden  $p$  con cambio estructural, de la forma

$$y_t = \mathbf{x}'_{t,p} \boldsymbol{\beta}_p + \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \boldsymbol{\delta}_p + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) = \mathbf{x}'_{t,p} h_t(\lambda)$ , con  $h_t(\lambda)$  una función indicador de la forma  $h_t(\lambda) = I(t > [n\lambda])$  y  $\lambda \in (0,1)$ , y  $\varepsilon_t$  un término de error estacionario. Así, para la muestra completa de tamaño  $n$ , se define la matriz de normalización  $\mathbf{D}_p = \text{diag}(1, n^{-1}, \dots, n^{-p})$ , de forma que

$$\tilde{\mathbf{h}}_{[nr],p}(\lambda) = \mathbf{D}_p \mathbf{h}_{[nr],p}(\lambda) \rightarrow \mathbf{H}_p(\lambda, r) = (I(r > \lambda), rI(r > \lambda), \dots, r^p I(r > \lambda)) = \mathbf{x}_p(r) I(r > \lambda)$$

para el índice  $(t-1)/n \leq r < t/n$ ,  $t = 1, \dots, n$ , con  $r \in [0,1]$ . Los contrastes de cambio en persistencia basados en ratios que estudiamos se basan en el ajuste MCO de la regresión (A.1) con  $\boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{0}_{p+1}$  en dos submuestras separadas de tamaños  $[n\tau]$  y  $n - [n\tau]$ , con  $\tau \in (0,1)$  el punto de posible cambio en persistencia. Para un valor dado de  $\tau \in [\tau_l, \tau_u]$ , de forma que  $[n\tau_l]$  y  $n - [n\tau_u] \geq (p+1)$ , los dos conjuntos de residuos MCO con omisión del cambio estructural sistemático vienen dados por

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{1,t}(p, \lambda) &= y_t - \mathbf{x}'_{t,p} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,[n\tau]}(\lambda) = \varepsilon_t + \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \boldsymbol{\delta}_p - \mathbf{x}'_{t,p} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) \quad t = 1, \dots, [n\tau] \\ &= \varepsilon_t + \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{D}_p \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\delta}_p - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{D}_p \mathbf{x}'_{t,p} \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

para la primera submuestra, y

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{2,t}(p, \lambda) &= y_t - \mathbf{x}'_{t,p} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n-[n\tau]}(\lambda) = \varepsilon_t + \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \boldsymbol{\delta}_p - \mathbf{x}'_{t,p} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n-[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p), \quad t = [n\tau] + 1, \dots, n \\ &= \varepsilon_t + \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{D}_p \mathbf{h}'_{t,p}(\lambda) \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\delta}_p - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{D}_p \mathbf{x}'_{t,p} \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n-[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

para la segunda submuestra, con

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, [n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p &= \mathbf{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \boldsymbol{\varepsilon}_j + \mathbf{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \left( \sum_{j=1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) \right) \boldsymbol{\delta}_p \\
&= \mathbf{Q}_{[n\tau]}^{-1}(p) \left\{ \mathbf{H}_{[n\tau]}(p) + \left( \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[n\tau]} \mathbf{x}_{j,p} \mathbf{x}'_{j,p} \right) I(\tau > \lambda) \boldsymbol{\delta}_p \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{D}_p \left( \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{Q}}_{[n\tau]}(p) \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\mathbf{H}}_{[n\tau]}(p) + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[n\tau]} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} \right) I(\tau > \lambda) \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\delta}_p \right\}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

y

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, n-[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p &= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{D}_p \left( \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{U}}_{n-[n\tau]}(p) \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\mathbf{J}}_{n-[n\tau]}(p) + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=[n\tau]+1}^n \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} h_j(\lambda) \right) \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\delta}_p \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{D}_p \left( \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{U}}_{n-[n\tau]}(p) \right)^{-1} \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\mathbf{J}}_{n-[n\tau]}(p) + \frac{1}{n} \left( \sum_{j=[n\tau]+1}^n \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} - \sum_{j=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \tilde{\mathbf{x}}_{j,p} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} I(\tau < \lambda) \right) \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\delta}_p \right\}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

los estimadores MCO del vector de coeficientes de regresión en cada submuestra considerada. Obsérvese que en (A.5), si el punto relativo de cambio estructural  $\lambda > \tau$  y está muy próximo a uno, de forma que  $[n\lambda] \rightarrow n$ , el término entre paréntesis al final de la expresión se anula y el efecto de la omisión del cambio estructural tiende a ser despreciable. Si en (A.2)-(A.5) llamamos  $\boldsymbol{\delta}_{p,n} = \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} \boldsymbol{\delta}_p$ , donde cada componente del vector de coeficientes de salto normalizados viene dado por  $\delta_{i,n} = \delta_i \cdot n^{i+1/2}$ , para  $i = 0, 1, \dots, p$ , entonces bajo el **Supuesto (A.1)** de la Sección 4 se tiene que el vector  $\boldsymbol{\delta}_{p,n} = O(n^{p+1/2})$ . Asumiendo que todas las matrices de normalizadas en (A.4) y (A.5) tienen límites finitos, entonces se tiene que

$$\sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, [n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) = O_p(1) + O(n^{p+1/2}) I(\tau > \lambda) = O_p(n^{p+1/2}) I(\tau > \lambda) \tag{A.6}$$

y

$$\sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, n-[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) = O_p(1) + O(n^{p+1/2}) \tag{A.7}$$

Teniendo ahora en cuenta que el estadístico dado en (4.1) puede escribirse también como

$$\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda) = \frac{\hat{A}_{n,p}(\tau, \lambda)}{\hat{B}_{n,p}(\tau, \lambda)} = \frac{\frac{n^2}{(n-[n\tau])^2} \frac{1}{n} \sum_{t=[n\tau]+1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{2,t}(p, \lambda) \right)^2}{\frac{n^2}{[n\tau]^2} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[n\tau]} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{1,t}(p, \lambda) \right)^2} \tag{A.8}$$

con  $n^2/(n-[n\tau])^2 \rightarrow (1-\tau)^{-2}$  y  $n^2/([n\tau])^2 \rightarrow \tau^{-2}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces para todo  $r \in [0, \tau]$ , el proceso de suma parcial escalado de residuos del ajuste MCO en la primera submuestra viene dado por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{1, [nr]}(p, \lambda) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \boldsymbol{\varepsilon}_t + \left( \frac{1}{n} \sum_{t=[n\lambda]+1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{t,p} \right) I(r > \lambda) \boldsymbol{\delta}_{p,n} - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{t,p} \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, [n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) \\
&= O_p(1) + O(n^{p+1/2}) I(r > \lambda) + O(n^{p+1/2}) I(\tau > \lambda) = O_p(1) + O(n^{p+1/2}) I(\tau > \lambda)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

donde la última igualdad resulta de que si  $\tau > \lambda$ , entonces para todo  $r \in [0, \tau]$  se cumple que  $r > \lambda$ , mientras que en términos de los residuos del ajuste MCO en la segunda submuestra, para todo  $r \in (\tau, 1]$  se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{2, [nr]}(p, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=[n\tau]+1}^{[nr]} \boldsymbol{\varepsilon}_t + \frac{1}{n} \left\{ \sum_{t=[n\tau]+1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{t,p} - \sum_{t=[n\tau]+1}^{[n\lambda]} \tilde{\mathbf{x}}'_{t,p} I(\tau < \lambda) \right\} \boldsymbol{\delta}_{p,n} - \frac{1}{n} \sum_{t=[n\tau]+1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{t,p} \sqrt{n} \mathbf{D}_p^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p, n-[n\tau]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) \tag{A.10}$$

En el caso  $\lambda \leq \tau$ , a partir de (A.5), se tiene que en (A.10) desaparece el efecto de la omisión del cambio estructural, de forma que sólo si  $\lambda > \tau$  dicho error de especificación afecta al comportamiento del proceso de suma parcial escalada de residuos MCO en la segunda submuestra y, por tanto, puesto que bajo la hipótesis nula de estacionariedad,

$$n^{-1/2} \sum_{t=[n\tau]+1}^{[nr]} \boldsymbol{\varepsilon}_t = n^{-1/2} \left( \sum_{t=1}^{[nr]} \boldsymbol{\varepsilon}_t - \sum_{t=1}^{[n\tau]} \boldsymbol{\varepsilon}_t \right) \Rightarrow \omega_\varepsilon [W_0(r) - W_0(\tau)] = O_p(1)$$

entonces puede escribirse

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{2, [nr]}(p, \lambda) = O_p(1) + O(n^{p+1/2}) I(\tau < \lambda) \tag{A.11}$$

Finalmente, para obtener el resultado establecido en el Teorema 1 sobre la divergencia del estadístico-ratio  $\hat{K}_{n,p}(\tau, \lambda)$ , sólo es necesario tener en cuenta que a partir de (A.9) y (A.11)

$(\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{1,[nr]}(p,\lambda))^2 = O_p(1) + O(n^{2p+1})I(\tau > \lambda)$  y  $(\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{2,[nr]}(p,\lambda))^2 = O_p(1) + O(n^{2p+1})I(\tau < \lambda)$ , donde los componentes finitos de ambos términos son los correspondientes procesos de sumas parciales escalados que resultarían en el caso de no existencia de cambio estructural, es decir,  $\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{j,[nr]}(p) = O_p(1), j = 1, 2$ . ■

## Prueba del Teorema 4.2

Haciendo uso del **Supuesto (A.2)** sobre la magnitud de los coeficientes de salto, de forma que en (A.2)-(A.5) se tiene ahora que  $\boldsymbol{\delta}_{p,n} = \sqrt{n}\mathbf{D}_p^{-1}\boldsymbol{\delta}_p = \mathbf{c}_p$ , de forma que bajo la hipótesis nula de estacionariedad, o bajo la secuencia de alternativas locales con  $\sigma_u^2 = (c/n)^2$  y diferentes tipos y grados de persistencia, se tiene que

$$\sqrt{n}\mathbf{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,[nr]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) \Rightarrow \left( \int_0^\tau \mathbf{x}_p(s)\mathbf{x}'_p(s)ds \right)^{-1} \left\{ \omega_\varepsilon \int_0^\tau \mathbf{x}_p(s)dV_{k,c}(s, \tau_0) + \left( \int_\lambda^\tau \mathbf{x}_p(s)\mathbf{x}'_p(s)ds \right) I(\tau > \lambda) \mathbf{c}_p \right\} \quad (\text{A.12})$$

y

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\mathbf{D}_p^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n-[nr]}(\lambda) - \boldsymbol{\beta}_p) &\Rightarrow \left( \int_\tau^1 \mathbf{x}_p(s)\mathbf{x}'_p(s)ds \right)^{-1} \\ &\times \left\{ \omega_\varepsilon \int_\tau^1 \mathbf{x}_p(s)dV_{k,c}(s, \tau_0) + \left( \int_\tau^1 \mathbf{x}_p(s)\mathbf{x}'_p(s)ds - \int_\tau^\lambda \mathbf{x}_p(s)\mathbf{x}'_p(s)ds \cdot I(\tau < \lambda) \right) \mathbf{c}_p \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

para  $k = 0, 1, 2$  ó  $3$ , de forma que puede obtenerse una distribución asintótica finita para los estimadores de los coeficientes de regresión, de la misma forma que para los procesos de suma parcial escalados de residuos MCO, de la siguiente forma

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{1,[nr]}(p,\lambda) \Rightarrow \omega_\varepsilon \cdot V_{k,p}^{(1)}(r, \tau_0) + T_p^{(1)}(r, \lambda) \quad (\text{A.14})$$

para la primera submuestra, donde  $r \in [0, \tau]$ , y

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\hat{S}_{2,[nr]}(p,\lambda) \Rightarrow \omega_\varepsilon \cdot V_{k,p}^{(2)}(r, \tau_0) + T_p^{(2)}(r, \lambda) \quad (\text{A.15})$$

para la segunda submuestra, con  $r \in (\tau, 1]$ , donde  $T_p^{(1)}(r, \lambda)$  y  $T_p^{(2)}(r, \lambda)$  vienen dados por

$$T_p^{(1)}(r, \lambda) = \left\{ \int_\lambda^r \mathbf{x}'_p(s)ds \cdot I(r > \lambda) - \int_0^r \mathbf{x}'_p(s)ds \left( \int_0^\tau \mathbf{x}_p(s)\mathbf{x}'_p(s)ds \right)^{-1} \left( \int_\lambda^\tau \mathbf{x}_p(s)\mathbf{x}'_p(s)ds \right) I(\tau > \lambda) \right\} \mathbf{c}_p \quad (\text{A.16})$$

y

$$\begin{aligned} T_p^{(2)}(r, \lambda) &= \left\{ \left( \int_\tau^r \mathbf{x}'_p(s)ds - \int_\tau^\lambda \mathbf{x}'_p(s)ds \cdot I(\tau < \lambda) \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_\tau^r \mathbf{x}'_p(s)ds \left( \mathbf{I}_{p+1} - \left( \int_\tau^1 \mathbf{x}_p(s)\mathbf{x}'_p(s)ds \right)^{-1} \int_\tau^\lambda \mathbf{x}_p(s)\mathbf{x}'_p(s)ds \cdot I(\tau < \lambda) \right) \right\} \mathbf{c}_p \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

## APÉNDICE B. Prueba del Teorema 5.1

Teniendo en cuenta (5.2), los estimadores MCO de  $\boldsymbol{\beta}_p$  y  $\boldsymbol{\delta}_p$  dependen del siguiente término

$$\sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{j,p}\mathbf{x}'_{j,p} & \mathbf{0}_{p,p} \\ \mathbf{x}_{j,p}\mathbf{h}'_{j,p}(\lambda) & \mathbf{0}_{p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{0}_{p+1} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{j,p}\boldsymbol{\eta}_j(\tau_0) \\ \mathbf{h}_{j,p}(\lambda)\boldsymbol{\eta}_j(\tau_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_n(p)\boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p)\boldsymbol{\beta}_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n(p, \tau_0) \\ \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde las matrices  $\mathbf{Q}_n(p)$  y  $\mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p)$  se han definido en (3.6), y los vectores  $\mathbf{H}_n(p, \tau_0)$  y  $\mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0)$  son como en (3.7) empleando las innovaciones dadas en (2.5)-(2.6). Empleando la estructura de la inversa de la matriz particionada por bloques en (3.5),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_n(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \\ \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) & \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}(p) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n(p, \lambda) & \mathbf{B}_n(p, \lambda) \\ \mathbf{B}'_n(p, \lambda) & \mathbf{C}_n(p, \lambda) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

con  $\mathbf{A}_n(p, \lambda) = \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p)$ ,  $\mathbf{B}_n(p, \lambda) = \mathbf{B}'_n(p, \lambda) = -\mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p)$  y  $\mathbf{C}_n(p, \lambda) = \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) + \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p)$ , entonces combinando este resultado y (B.1), se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_{p,n}(\lambda, \tau_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{0}_{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n(p, \lambda) & \mathbf{B}_n(p, \lambda) \\ \mathbf{B}'_n(p, \lambda) & \mathbf{C}_n(p, \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n(p, \tau_0) \\ \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_p \\ \mathbf{0}_{p+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \cdot \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) \\ \mathbf{U}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \mathbf{J}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) - \mathbf{Q}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \cdot \mathbf{H}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

de forma que el proceso de suma parcial de residuos MCO, ecuación (5.3), puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_{k,j}(\tau_0) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} \left\{ \bar{\mathbf{Q}}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\mathbf{H}}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{j=[n\lambda]+1}^{[nr]} \tilde{\mathbf{x}}'_{j,p} \cdot I(r > \lambda) \left\{ \bar{\mathbf{U}}_{n-[n\lambda]}^{-1}(p) \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\mathbf{J}}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) - \bar{\mathbf{Q}}_{[n\lambda]}^{-1}(p) \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\mathbf{H}}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En el caso  $k = 0$ , dado el límite estocástico de la suma parcial de términos de error estacionarios y de las matrices  $\tilde{\mathbf{H}}_{[n\lambda]}(p, \tau_0)$  y  $\tilde{\mathbf{J}}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0)$ , escalados por  $n^{-1/2}$ , se sigue el resultado de distribución asintótica nula dado en la sección 3. En el caso  $k = 3$ , bajo la alternativa I(1) constante en toda la muestra, se sigue la consistencia de los estadísticos de contraste, tanto condicionales a un punto de ruptura dado como incondicionales. Puesto que en los casos  $k = 1$  y  $2$ , empleando los resultados en (2.7) y (2.9-1)-(2.9-2), se tiene que para  $\sigma_u^2 > 0$  e independiente del tamaño muestral, estos mismos términos sólo convergen a límite finitos cuando son escalados por el factor  $n^{-3/2}$ , con

$$(n\sqrt{n})^{-1} \sum_{j=1}^{[nr]} \eta_{k,j}(\tau_0) \Rightarrow \omega_u V_k(r, \tau_0) \quad (\text{B.5})$$

y

$$(n\sqrt{n})^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_{[n\lambda]}(p, \tau_0) \Rightarrow \omega_u \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) dV_k(s, \tau_0) \quad (\text{B.6})$$

$$(n\sqrt{n})^{-1} \tilde{\mathbf{J}}_{n-[n\lambda]}(p, \tau_0) \Rightarrow \omega_u \int_\lambda^1 \mathbf{x}_p(s) dV_k(s, \tau_0) \quad (\text{B.7})$$

Así,

$$\begin{aligned} (n\sqrt{n})^{-1} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) &\Rightarrow \omega_u \left\{ V_k(r, \tau_0) - \int_0^r \mathbf{x}'_p(s) ds \left( \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) dV_k(s, \tau_0) \right. \\ &\quad \left. - I(r > \lambda) \int_\lambda^r \mathbf{x}'_p(s) ds \left( \left( \int_\lambda^1 \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_\lambda^1 \mathbf{x}_p(s) dV_k(s, \tau_0) - \left( \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) \mathbf{x}'_p(s) ds \right)^{-1} \int_0^\lambda \mathbf{x}_p(s) dV_k(s, \tau_0) \right) \right\} \\ &= \omega_u V_{k,p}(r, \tau_0) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Entonces  $n^{-1/2} \hat{S}_{[nr],p}(\lambda, \tau_0) = O_p(n)$ , y de esta forma los numeradores de los estadísticos de contraste de estacionariedad en torno a un componente determinista con cambio estructural, ecuaciones (5.4)-(5.6), en ausencia de cambio estructural y bajo cambio en persistencia son  $O_p(n^2)$  para (5.4) y (5.5) y  $O_p(n)$  para el estadístico dado en (5.6). Para completar el estudio del comportamiento de estos estadístico, queda por establecer el comportamiento asintótico del estimador de la varianza a largo plazo, dado por

$$\hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0) = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} w(h/q_n) \left( n^{-1} \sum_{t=|h|+1}^n \hat{\eta}_{t,p}(\lambda, \tau_0) \hat{\eta}_{t-h,p}(\lambda, \tau_0) \right) \quad (\text{B.9})$$

donde  $w(\cdot)$  es la función kernel o de ponderación, con pesos decrecientes con el retardo temporal, de las autocovarianzas muestrales y  $q_n$  es el parámetro bandwidth o ancho de ventana, con  $q_n = o_p(\sqrt{n})$  y  $1/q_n + \sqrt{n}/q_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , empleando los residuos MCO en (5.1) y el resultado de convergencia en (B.8) del proceso de suma parcial normalizado. Así, a partir de esos resultados y el argumento de Phillips (1991), se tiene que

$$(nq_n)^{-1} \hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0) \xrightarrow{c.s.} \omega_u^2 K(w) \int_0^1 V_{k,p}(s, \tau_0)^2 ds, \quad K(w) = \int_{-1}^1 w(s) ds \quad (\text{B.10})$$

de forma que  $\hat{\omega}_{n,q_n}^2(\lambda, \tau_0) = O_p(nq_n)$  y, por tanto, se tiene que  $\hat{M}_{p,q_n}^{(j)}(\lambda, \tau_0) = O_p(n/q_n)$ , para  $j = 1, 2$  y  $\hat{M}_{p,q_n}^{(3)}(\lambda, \tau_0) = O_p((\frac{n}{q_n})^{1/2})$  para  $j = 3$ . De esta forma, los contrastes de estacionariedad con posible cambio estructural sistemático tipo KPSS, V/S y KS, bajo la alternativa de un cambio en persistencia en el componente estocástico, tenderán al rechazo de la hipótesis nula, identificando erróneamente estacionariedad en diferencias con un cambio estructural en el componente determinista. ■

## Prueba del Teorema 5.2.

Empleando la secuencia de alternativas locales donde la varianza a corto plazo del término de error en la ecuación de transición es de la forma  $\sigma_u^2 = (c/n)^2$ , se tiene entonces que la misma estructura de la distribución límite finita en (B.8) para el proceso  $(n\sqrt{n})^{-1}\hat{S}_{[nr],\rho}(\lambda, \tau_0)$  se verifica entonces para el proceso  $n^{-1/2}\hat{S}_{[nr],\rho}(\lambda, \tau_0)$  en (B.4), salvo que el proceso límite  $V_k(r, \tau_0)$ , para  $k = 1, 2$  y  $3$  (ecuaciones (2.9-1)-(2.9-3)), se reemplaza por  $V_{k,c}(r, \tau_0)$ , como en la ecuación (2.7) de la sección 2. El resto de los resultados se obtienen empleando los argumentos de la prueba del Teorema 5.1 y del Teorema del Mapeado Continuo a partir de las expresiones de los estadísticos de contraste de estacionariedad con cambio estructural. ■